

群 教 セ	G03 - 04
	平 28.261 集
	数学 - 高

高校数学科において 数学的な見方・考え方を育成する指導の工夫

——作問の視点を取り入れた学習課題の工夫と
多面的な考察の場の設定を通して——

特別研修員 富澤 茂

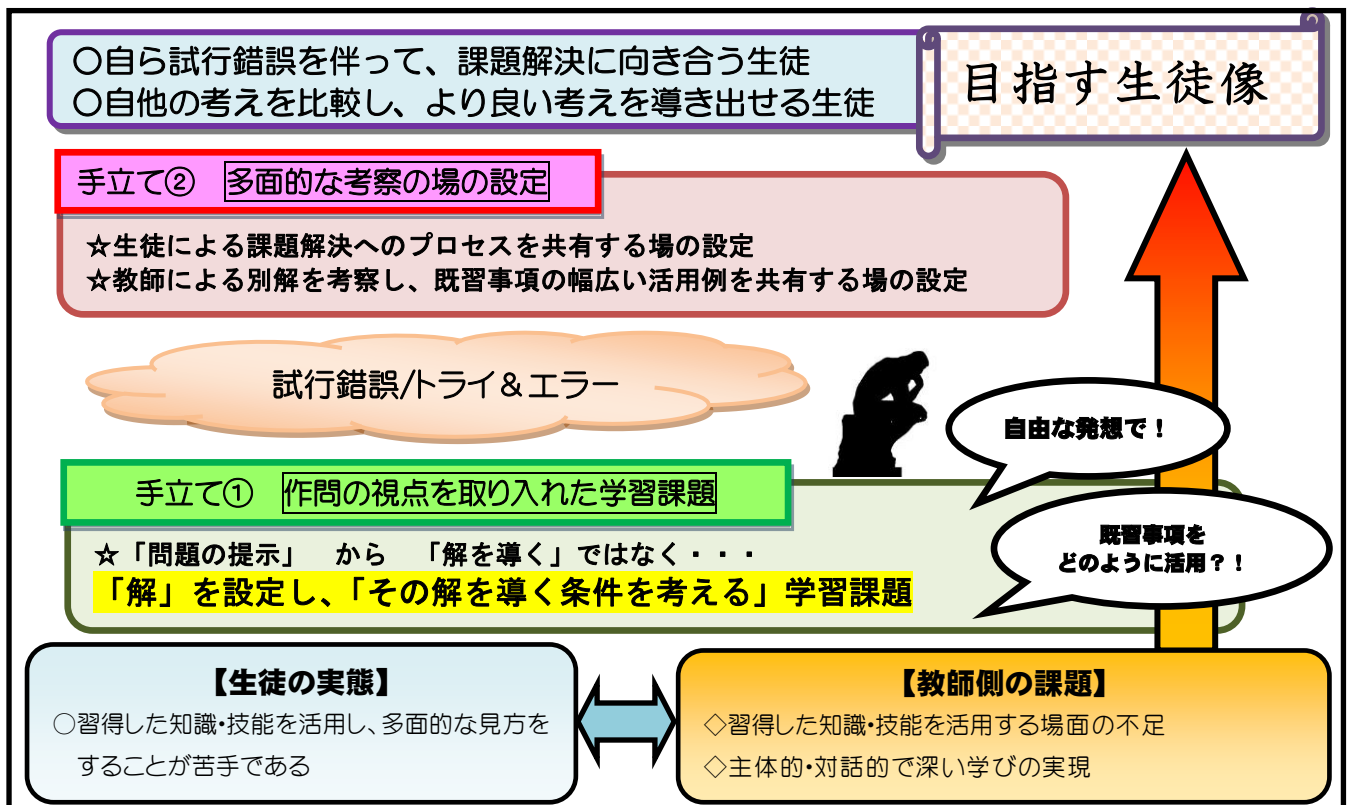
I 研究テーマ設定の理由

次期学習指導要領が目指す生徒の姿の中で、「アクティブ・ラーニングの視点」からの授業改善の必要性が示された。アクティブ・ラーニングとは「児童生徒が課題を発見し解決に向けて主体的・協働的に学ぶ授業改善の視点」のことであり、次期改訂ではさらに、主体的・対話的で、深い学びを実現するものでなければならないとされている。

本校には、数学に苦手意識を持つ生徒が非常に多い。そのため、普段の授業では、まず「解けた」という感覚を持たせるため、基本的な計算演習に主眼を置いてしまい、数学の学習が単なる問題の解法の記憶に陥りがちであるという課題があった。そこで、「作問の視点を取り入れた学習課題の工夫」を通じて、習得した数学的な知識・技能を活用する学習活動を本実践で追求することが大切であると考えた。「作問の視点を取り入れた学習課題」とは、「問題の提示」から「解」を導くという通常のプロセスを遡り、「解」から「その解になるための条件」を考察する課題である。既習事項が幅広く活用できるような課題を工夫することで、生徒の試行錯誤を促す手立てとした。生徒は苦勞して課題に挑戦したのちに、他者の思考過程や教師の用意した別解を考察する。このような学習活動を通じて、生徒の数学的な見方・考え方を育成したいと考え本主題とした。

II 研究内容

1 研究構想図



2 授業改善に向けた手立て

数学的な見方・考え方を育成するために次の手立てを構成する。

- | | |
|------|---|
| 手立て① | 作問の視点を取り入れた学習課題の工夫
・「解」を設定し、「その解になるための条件」を考察する学習課題 |
| 手立て② | 多面的な考察の場の設定
・生徒による課題解決へのプロセスを共有する場の設定
・教師による別解を考察し、既習事項の幅広い活用例を共有する場の設定 |

手立て①は、生徒の試行錯誤を促すことを目的とする。そのために、以下の2点に留意して学習課題を工夫とした。

- 習得した既習事項を活用して、複数の解決方法が存在する学習課題
- 教科書には載っていない学習課題

以上の留意点を踏まえた学習課題をつくるために、課題作りの視点を変えてみた。それが「作問の視点」である。「作問の視点」とは、「問い」を与え「解」を導くという通常のプロセスを遡り、「解」を先に設定し、「その解になるための条件」を考察する見方である。このような視点で学習課題を工夫することで、課題解決に向けての試行錯誤を促し、数学的な思考力を育成できると考えた。

手立て②は、他者の課題解決のプロセスや、授業者の用意した別解を考察することで、生徒の数学的な見方・考え方を深めることを目的とする。その際、以下の2点に留意した。

- 生徒の様々な発想・着眼点について取り上げる。その際、結果ではなくプロセスの説明に重点を置く。
- 別解は小学校で学習した内容を用いた比較的簡単なものから、少し高度なものまでできるだけ多くのパターンを準備しておく。

Ⅲ 研究のまとめ

1 成果

- 手立て①により、作問の視点を取り入れた学習課題を工夫したことで、生徒が試行錯誤している様子もワークシートからも見取ることができた。また、授業者が想定をしていない発想で課題をする生徒もおり、そのような解決方法を全体で共有することで、より考察を深めることへと繋がった。
- 手立て①では、個人で試行錯誤する十分な時間の確保が重要であると考え、事前に既習事項をホワイトボードにまとめておいた。単元における既習事項をテンポよく全体で確認できたことで、生徒の活動時間の確保に繋がった。
- 手立て①から、手立て②への授業の流れは生徒の思考を深める上で有効であった。試行錯誤し、苦労して課題に取り組んだ後に多面的な別解を紹介することで、生徒は別解が持つそれぞれのよさや活用例をより深く考察できた。

2 課題

- 手立て①における課題設定では、授業者自らも試行錯誤が必要である。生徒の実態に応じて、作問の視点からどのような条件付けが学習者の試行錯誤を促すのかを吟味する必要がある。
- 手立て②において、別解に対しての考察では、追究すべき数学的な事柄と、紹介にとどめる程度でよい数学的な事柄をあらかじめ授業者が決めておくことも重要であると感じた。単元において、生徒に身に付けさせるべき事柄を明確にする必要がある。
- 課題解決に対して見通しの立たない生徒への対応として、補助的な教材を取り入れて思考を活性化させるべきか、他者と協働させるべきなのか、今後の検討課題である。

実践例

1 単元名 数学Ⅱ「図形と方程式」(第2学年・2学期)

2 本単元について

本単元では、生徒にとってもなじみの深い「平面座標」や「直線」、「円」についての基本的な性質や関係を数学的に表現し、その有用性を改めて認識することを目標とする。まずは、平面上の点の座標、象限、また、2点間の距離、内分点・外分点について学び、公式を活用できるようにする。生徒は内分点・外分点の公式と2点間の距離の公式を混同しやすいので、図形的な意味も含めて注意深く指導にあたりたい。直線の平行や垂直という概念の理解は、高校数学のみならず、社会生活を送る上でも必要不可欠である。教室を見渡せば、垂直と平行で形付けられた多くの物があふれている。実生活と関連付けることで、その有用性を認識させ、興味・関心を引き出したい。円も生徒にとってはなじみ深い図形である。しかし、生徒の認識は曖昧であることが多く、円という図形を言葉で正確に表現できる生徒は少ない。円という図形を「定点からの距離が一定である点の集合」と改めて明確に定義付けることで、その有用性と汎用性を具体的な活用例とも結び付けたい。そして、最後に平面図形と不等式との関係について理解を深め、不等式の表す領域を線形計画法などに活用する活動を通してその有用性を認識させたい。

以上のような考えから、本単元では以下のような指導計画を構想し実践した。

目標	座標や式を用いて、直線や円などの基本的な平面図形の性質や関係を数学的に表現し、その有用性を認識するとともに、事象の考察に活用できる。	
評価 規 準	関心・意欲・態度	<ul style="list-style-type: none"> 点の座標を使った問題に関心を持ち、積極的に解こうとしている。 円について、直線と同じように、方程式に表そうとしている。 方程式の表す図形を境界とする領域は不等式で表せることに関心を持ち、いろいろな不等式について、その条件を満たす領域の考察に活用しようとしている。
	数学的な見方や考え方	<ul style="list-style-type: none"> 座標を用いて図形の性質や関係を調べる解析幾何学の手法の初歩を考察することができる。 方程式を用いて円と直線の位置関係について考察することができる。 不等式の表す領域を、数学的に考察することができる。
	数学的な技能	<ul style="list-style-type: none"> 2点間の距離、内分点、外分点の公式を使って、適切に問題を解くことができる。 与えられた条件から、円の方程式を求めることができる。 不等式の表す領域を、図示することができる。
	知識・理解	<ul style="list-style-type: none"> 2直線の平行・垂直の関係について、理解している。 円と直線の位置関係を、数学的に処理できることを理解している。 不等式と領域についての関係を理解している。
過程	時間	主な学習活動
課題 把握	第1時 ～10時	<ul style="list-style-type: none"> 2点間の距離、内分点、外分点の公式を使って、適切に問題を解く。 $ax + by + c = 0$ が表す直線の傾きと切片を求める。また、1点の座標と傾きや、2点の座標が与えられたときの直線の方程式を求める。 ある1点を通り、与えられた直線と平行な直線、および垂直な直線の方程式を求める。
課題 追究	第11時 ～17時	<ul style="list-style-type: none"> 円の方程式の一般形から、円の中心の座標と半径を求める。 連立方程式を用いて、円と直線の共有点の座標を求める。
	第18時 ～23時	<ul style="list-style-type: none"> 直線と直線、および直線と円を境界にもつ連立不等式の表す領域について交点を求めてその領域を座標平面上に図示する。
まとめ	第24時	<ul style="list-style-type: none"> 既習事項を活用し総合問題に取り組む。

3 本時及び具体化した手立てについて

本時は全 24 時間計画の第 10 時に当たる。「1 節 座標と直線の方程式」までの学習内容を柱とし、複数の既習事項を活用できる学習課題を設定する。授業を通して、生徒の数学的な見方・考え方を育成するために以下の手立てを具体化した。

手立て① 作問の視点を取り入れた学習課題の工夫

(学習課題) 以下に記した条件にあう問題を作成する。

$\triangle ABC$ がありその重心の座標は $(2, 6)$ である。 $\triangle ABC$ の各辺をなす 3 直線 AB、BC、CA を決定せよ。

工夫

【作問の視点】

「3 直線から重心を求める」という通常のプロセスではなく、「重心から 3 直線を決定する」と条件付けることで、数学的な思考力が必要となり、試行錯誤を促すと考えた。

手立て② 多面的な考察の場の設定

- ・生徒による課題解決のプロセスを説明する場の設定
- ・教師による別解の紹介（4 種類の解法例の紹介）

4 授業の実際

「既習事項の確認」 → 「手立て① による課題の提示」 → 「手立て②」の流れで授業を構成した。

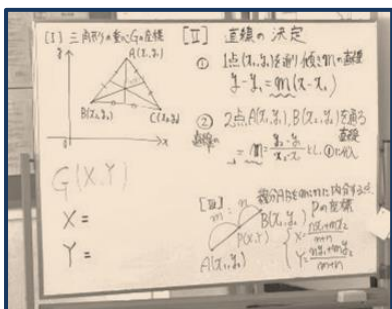


図 1 既習事項の確認

(1) 「既習事項の確認」の場面

三角形の重心に関する内容と直線の決定条件に関する内容を事前にホワイトボードに書き込んでおき、簡潔に既習事項の確認をした。生徒への発問を通してキーワードを確認し、ホワイトボードに書き込む形で整理した(図1)。

既習事項の確認とともに、「与えられた 3 直線から重心を求める」という、通常のプロセスからなる例題に取り組みせ、重心が $(2, 6)$ になることを全体で確認した。重心 $(2, 6)$ は、実施日の 26 日に対応させた。どのような重心の座標であっても、実際に作問できるということを生徒に示したかったためである。



図 2 協働の様子

(2) 課題解決の場面

自力解決の時間を 10 分間確保したのちに、協働学習へと移行した。ただし、最後まで自力解決にこだわりたい生徒に配慮し、協働での学習の強制はせず、「必要であれば協働で」と指示をした。

※今回の実践では全員が協働で取り組んでいた(図2)。

ワークシートは A 3 用紙を使い、記述スペースを十分に確保した。思考過程を残しておくことで自らの考えを整理し、課題解決へ近づいて欲しいとの考えから、「できるだけ消しゴムは使わないように」と生徒たちには言葉掛けをした。また、自力解決の際、格子点付のプリントを配布した。使用するかしないかは生徒の判断に委ねたが、4 名の生徒がこのプリントを利用して課題解決に取り組んでいた。

既習事項では「重心の公式」を活用した解決方法が多かったが、3 頂点の選び方は生徒によって全く異なった。任意の 3 頂点をどこに設定するかで直線を求める際の計算量で大きな差が出た。

図 3 は直線の方程式を直接求めようとしたが上手くいかずに、重心の公式に数値を当てはめ糸口を見つけた生徒の記述である。

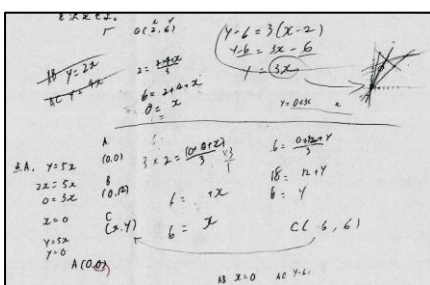


図 3 試行錯誤の様子

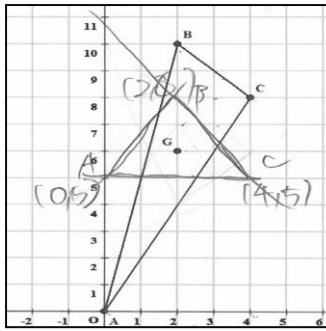


図4 生徒の考え1
図形的な考察



図5 生徒の考え2
重心の公式の利用

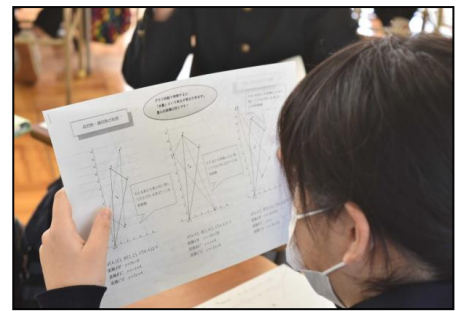


図6 別解の考察

(3) 多面的な考察の場面

図4は、配布した格子点付のプリントを活用して課題解決に取り組んだ生徒の記述である。「重心は中線をそれぞれ1:2に内分する」という性質をもとに、具体的に3頂点の座標をプリントに書き込むことで課題解決に至った。

図5は既習事項である「三角形の重心の公式」を利用した生徒が解決へのプロセスを説明している様子である。多くの生徒が協働学習を経てこのアプローチで課題解決に至った。三角形の3頂点の座標をいかにシンプルに設定するかが、その後、直線の方程式を求める際の計算量にも影響した。今回の取組で、計算に苦労した結果、先を見通すことの大切さに気付いた生徒もいた。

図6は授業の終盤に、生徒に多面的な別解（今回は四つ）を紹介している様子である。頷きながら別解を見つめる生徒の姿も見受けられ、数学の汎用性や既習事項の多面的な活用例を紹介できた。

5 考察

手立て①を具体化し、「三角形をなす3直線から重心の座標を求める」という通常のプロセスではなく、「重心の座標から3直線を決定する」と条件付けた。教科書には解き方が載っていない学習課題であるため、課題解決に向けて既習事項の「何を」「どのように活用」するのか、という見通しを生徒自身が立てる過程で試行錯誤を促せた。また、授業後に行ったリフレクションからは意欲面での向上が伺えた。「問題を考えるのはすごく大変であったけど、面白かった」という趣旨の感想も複数あり、課題に挑戦することが数学を思考する楽しさへも結び付いたようである。

また、なんとか条件に合った3点の座標が求められたとしても、直線を求める際、計算が煩雑になり苦しんだ生徒もいた。「もう少し計算し易い座標に設定し直してみれば」と言葉掛けをしたことで、今度は「直線を求めやすくするための座標設定」という新たな視点での試行錯誤が始まった。

手立て②に関しては、たとえ既習事項でなくてもできるだけ多くの別解を示すことは、生徒の興味・関心を引き付けるようである。小学校で学習した内容を用いた比較的簡単なものから、回転行列を用いた高度な別解まで広く紹介することで、数学の実用性や汎用性、分野の繋がりなどを生徒に伝える機会が生まれた。「知らない解き方は面白い」「直線の方程式なのにsinが出てきて驚いた」「今までに習ったことを使えばたくさん問題が解けることを学んだ」との感想からも手立て②が学びを深めるには効果的であると考える。

また、実践ではこちらが想定していない解決方法で課題に取り組む生徒もおり、発想の豊かさを感じ取れた。そのような発想は手立て②によって積極的に取り上げることで生徒の肯定感も高まるはずである。

生徒の実態に合わせた試行錯誤を促す学習課題(手立て①)と、手立て②において考察を深めるための別解の開発が重要である。