

群 教 セ	G03 - 04
	平 29. 265 集
	数学 - 高

高等学校数学科における 高い思考力を持つ生徒の育成

—問題解決のための視覚的アプローチの工夫を通して—

特別研修員 田谷 倫子

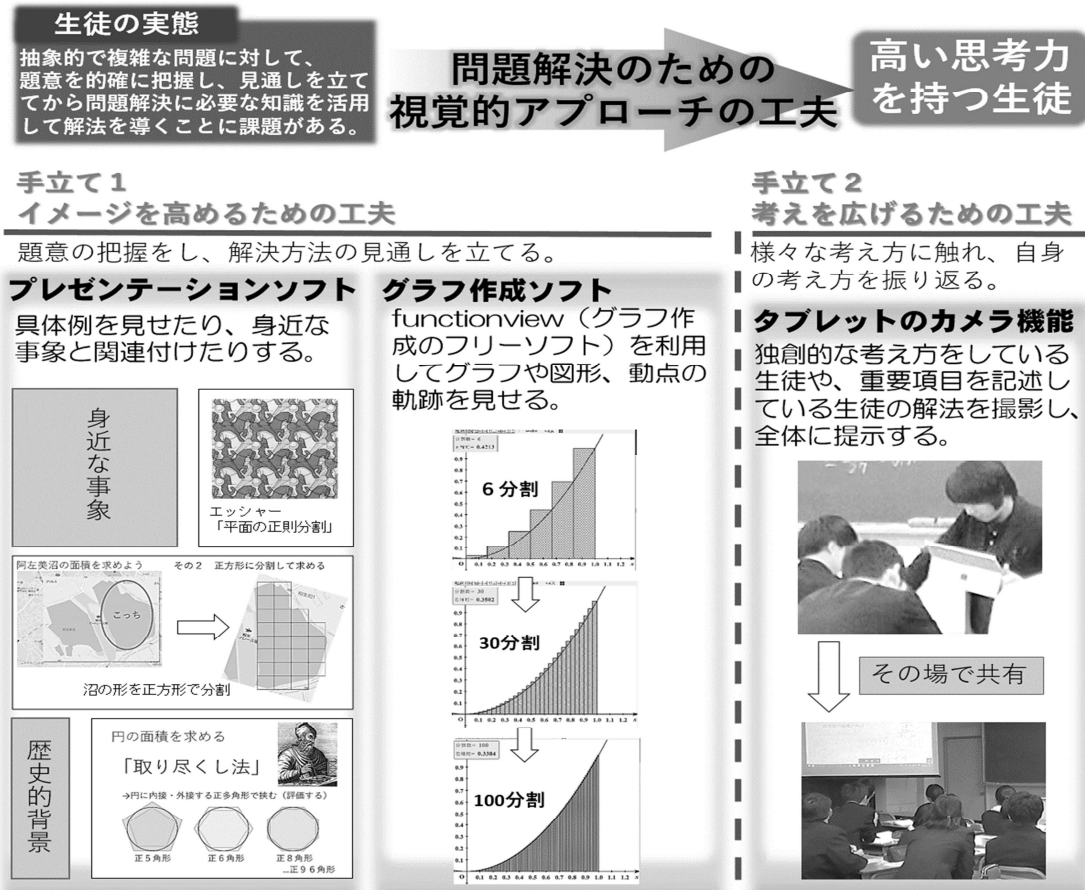
I 研究テーマ設定の理由

平成 29 年度県立学校教育指導の重点における数学の目標では「将来にわたり自ら学び自ら考える力や、事象を数学的に考察し表現する力を育成する」とある。情報が溢れ、変化が急速な現代社会において、これまでのように単に知識を蓄積するだけでなく、その知識をどのように活用するかが重要となる。数学科の授業においても、将来を見据えて主体的に学ぶ姿勢、的確な思考力・判断力・表現力、他者と協働して問題を解決する力を高めることが必要不可欠である。

所属校では真面目で素直な生徒が多く、与えられた課題に対しての取組は良好である。自力ですぐに解けない問題に対して、授業後に友人や教員に質問する生徒の姿もある。一方で、数学科の授業において、抽象的で複雑な問題に対して題意を的確に把握し、見通しを立ててから問題解決に必要な知識を活用して解法を導くことに課題が見られる。そこで、生徒の主体性やコミュニケーション能力を生かしながら、視覚的アプローチの工夫を通して生徒の数学的な思考力を高めたいと考え、本テーマを設定した。

II 研究内容

1 研究構想図



2 授業改善に向けた手立て

抽象的で複雑な問題を扱う場面で、生徒の思考力を高めるために、視覚的アプローチを利用した以下の二つの手立てを取り入れる。

手立て1 イメージを高めるための工夫

手立て2 考えを広げるための工夫

手立て1は、問題に取り組む際に、題意の把握をし、解決方法の見通しを立てるためのきっかけとして設定する。functionview（グラフ作成のフリーソフト）を利用してグラフや図形、動点の軌跡を見せる。また、抽象的な問題を扱う際は、プレゼンテーションソフトを利用して具体例を見せることや、身近な事象と関連付けることで、イメージを持てるようにする。

手立て2は、独創的な考え方をしている生徒や、重要項目を記述している生徒の解法をタブレットのカメラ機能で撮影し、全体に提示する。様々な考え方に触れる機会を作り、生徒が自身の考え方を振り返り、多面的、発展的に考えることができるようにする。

このように、二つの手立てを通して、題意を把握することや、解決方法の見通しを立てること、他者の考え方に触れることは、生徒の数学的な思考力を高めることになると考える。

Ⅲ 研究のまとめ

1 成果

- プレゼンテーションソフトを利用し具体例を挙げて説明したことで、公式の意味や歴史的背景を手軽に盛り込みながら、数学的な見方、考え方についてインパクトを与えることができた。授業後の生徒アンケートの結果からも、生徒が数学的な見方、考え方を習得するために有効であったと思われる。
- functionviewによって、板書では敵わない美しさで図形の変化を見取ることができた。そのため直観的な理解ができ、複雑な問題に取り組む際にも、グラフをかいて考える習慣につながった。グラフや図形の概形を把握する際に有効であると考えられる。
- 生徒の解法をタブレットのカメラ機能で撮影し、全体に提示したことで、他者の考え方に触れさせ、生徒自身の考え方を振り返らせることができた。授業後の生徒アンケートでは、「グループでの話合いや、友人の立式が参考になった」という回答が多数見られた。他の生徒の考え方をその場で共有できるため、多くの生徒の解法を比較、検討する際に有効であると考えられる。さらに、投影した解法を用いて生徒自身に説明させることで、発表者の考えも練り上げることができた。また、生徒の解法をタブレットのカメラ機能で撮影し、全体に提示するタイミングは、個人で課題を把握する時間の後、少人数のグループで解法を見せ合いながら相談する時間を設け、その後に設定した。少人数のグループの時間には、様々な考え方の人と交流できるよう、指定されたグループにとらわれず自由に取り組んでもよいこととした。このことで、時間の使い方も生徒の自由になり、自力で考えたい生徒に対しても問題解決の時間を十分とることができた。これらの時間設定から、様々な考え方が生まれ、全体に提示する際に、多くの生徒の解法を比較、検討しやすくなると考える。

2 課題

- ICT機器を利用する場合に、思考力を高めるためには、提示のタイミングやそれに合わせた発問を工夫することが重要であることを再認識した。特にイメージを高めるためにグラフや具体例を見せる場合、イメージと立式を結び付けるときに、発問や学習形態等指導の工夫が必要である。
- ICT機器を利用すると時間短縮できるが、単に見るだけでなく生徒自身が書くことが大切となる場面がある。生徒は教師の書き方も参考にしながらノートにまとめ、そのことで思考力を高めることもあることから、「板書→ICTで投影→映像に書き込み」の流れをバランス良く取り入れた、生徒の思考力を高める授業展開を模索していく必要がある。

実践例

1 単元名 数学Ⅲ「積分法」(第3学年・2学期)

2 本単元について

高校数学では、微分の逆演算として不定積分を導入しているが、本単元では、積分法の起源に深く関連する区分求積法について学ぶ。古代ギリシアでは、アルキメデスが積分法につながる「取り尽くし法」を駆使して、円や放物線で囲まれた図形の面積を求めたり、球の体積、表面積を計算した。微分法についても、同時代に接線の傾きを扱うなどその芽生えがあったとされる。17世紀に入り、フェルマーやバーローらが曲線上の点における接線を求める問題を取り扱うなど微分の考えを発展させた。その後ニュートンとライプニッツにより、接線を求める問題と図形の求積を結び付け、それぞれ独自の方法で微分積分学の基礎を築いた。約二千年の歳月を経て融合した積分法と微分法の歴史的ロマンを味わえる題材である。

数学Ⅱの積分では、二次までの多項式関数を中心に、関数の定数倍、和、差の不定積分や定積分を扱っている。また、直線や関数のグラフで囲まれた図形など、簡単なものについてその面積を求めることを扱っている。本単元では、数学Ⅱで学んだ基本的な性質を土台として、前章「微分法」で取り上げた積の導関数、商の導関数、合成関数の微分法等も活用し、分数関数や無理関数、三角関数、指数関数、対数関数など扱う関数の範囲を拡張する。積分の基本的な性質や簡単な置換積分法、部分積分法等を理解させ、これらの方法を習熟させたい。これにより、これまで公式を機械的に利用することで円の面積、円錐や球の体積等を求めていたが、公式の証明を与えることができるようになる。積分法によって、様々な図形の面積や立体、回転体の体積を求めることができるという有用性を認識させたい。

以上のような考えから、本題材では以下のような指導計画を構想し実践した。

目標	いろいろな関数についての積分法を理解し、活用できるようになるとともに、区分求積法を理解し、それを用いて複雑な極限の値の求め方を再考する。	
評価 規 準	関心・意欲 ・態度	積分法に関心を持つとともに、それらを事象の考察に積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断しようとする。
	数学的な見 方や考え方	事象を数学的に考察し表現したり、思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えたりすることなどを通して、積分法における数学的な見方や考え方を身に付けている。
	数学的な 技能	積分法において、事象を数学的に表現・処理する仕方や推論の方法などの技能を身に付けている。
	知識・理解	積分法における基本的な概念、原理、法則等を体系的に理解し、知識を身に付けている。
時間	内容	主な学習活動
第1時 ～ 第6時	不定積分	<ul style="list-style-type: none"> 変数の置換を工夫して置換積分法を利用し、複雑な関数の不定積分を求める。 被積分関数の特徴を見て部分積分法を利用し、複雑な関数の不定積分を求める。 被積分関数を変形し、置換微分や部分積分を利用して不定積分を求める。 三角関数の相互関係、半角の公式や2倍角の公式、積和の公式を利用し、不定積分を求める。
第7時 ～ 第11時	定積分	<ul style="list-style-type: none"> 定積分の定義や性質、図形的な意味を理解し、関数の定積分を求める。 絶対値を外して定積分を求める。 積分区間の変換に注意し、置換積分法を利用して、複雑な関数の定積分を求める。 偶関数、奇関数の定積分の性質を利用して、定積分を計算する。 部分積分を繰り返し適用することで、定積分を求める。
第12時 ～ 第15時	定積分の 種々の問題	<ul style="list-style-type: none"> 定積分で表された関数を微分する。 数列の和を長方形の面積の和として捉え、その極限を関数の定積分で表して求める。 定積分を利用して不等式の証明を考察する。
第16時	まとめ	<ul style="list-style-type: none"> 積分法の問題演習を行う。

3 本時及び具体化した手立てについて

本時は全16時間計画の第14時に当たる。区分求積法を理解し、それを用いて複雑な極限の値の求め方を考察する。区分求積法は抽象的で捉えにくいいため、具体例を挙げることで、イメージを持たせること、一般化するための立式と式変形をすることが重要である。そこで、次のように手立てを具体化した。

手立て1 イメージを高めるための工夫

functionviewを利用し、面積の和が分割によって変化する様子を見せることで、区分求積法の理解につなげる。また、プレゼンテーションソフトを利用して、エッシャーの正則分割の絵や、沼の面積を正方形を敷き詰めて求める方法、円の面積を求める「取り尽くし法」に触れ、多角形に分割することのよさを見せる。

手立て2 考えを広げるための工夫

ワークシート学習の際に、3、4人のグループを作り、解法を見せ合いながら相談する時間を設ける。指定されたグループにとらわれず自由に取り組んでもよいこととする。その後、曲線で囲まれた部分を長方形で近似する際に長方形の面積の和の計算方法について、独自の発想や立式で解いている生徒、区分求積法の立式につながる重要事項を記述している生徒の解法をタブレットのカメラ機能で撮影し、全体に提示する。

4 授業の実際

「曲線で囲まれた部分を長方形で近似できるか？」をテーマとして、具体例の考察から始め、区分求積法の式を導き出すことを目標として、以下の流れで授業を構成した。

「導入（手立て1）」→「具体例での考察（手立て1、2）」→「一般化（手立て2）」

(1) 導入の場面

エッシャーの正則分割の絵（図1）、阿左美沼の面積を求める（図2）等、身近なものを取り上げ、プレゼンテーションソフトで見せた。授業後の生徒アンケートにおいて、印象に残ったこととして「エッシャーの絵」「複雑な形は多角形に例えて考える」「正方形や長方形を敷き詰める」という回答が多数見られた。数学的な見方、考え方を習得するために手立て1は有効であったと考えられる。

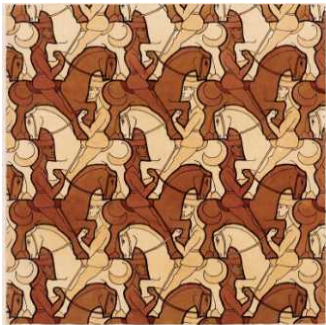


図1 エッシャー「平面の正則分割」

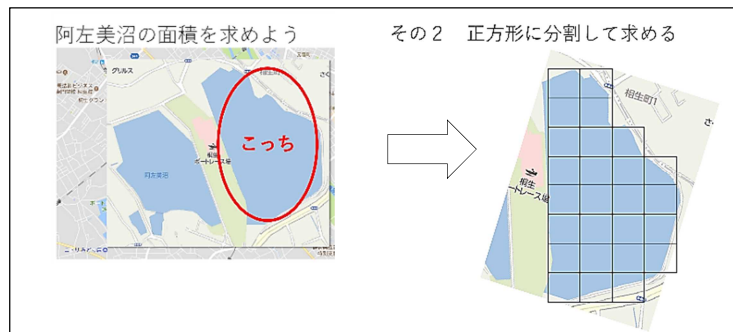


図2 沼の形を正方形で分割

(2) 具体例での考察の場面

曲線 $y = x^2$ と x 軸及び直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積を、長方形に分割し、長方形の面積の和を求める。

まずfunctionviewで3分割の場合の図を投影し、板書で面積の和の求め方を示した。あえて Σ の公式を書かず、途中計算は省略し、答えのみ書いた。その後、グループごとに分割数を変え、それぞれの長方形の面積の和を求めさせた。なかなか取りかかれずにいる生徒も見られたが、グループ内で確認し合い、活発に意見交換をしていた（図3）。授業後の生徒アンケートでは「つまづいたときや、自分の考えを整理したり、広げたりする際に、ヒントとなったものや発言は何か」という問いに対して、「友達の言葉」「同じグループの人の言葉」「公式の理解と分からないところの共有が大切」という回答があった。



図3 グループごとに話し合う様子

また、面積の和を求める際の計算方法について、8分割のグループでも $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2$ を計算する際に、2乗の値をそれぞれ計算してから和を求める生徒が多かった。その中で、 Σ の公式を使って計算した生徒の解答をタブレットのカメラ機能で撮影し、全体に提示した(図4)。一般化の際に Σ の公式を利用することに気付かせたかったからである。実際は、投影した写真が見づらく、その生徒に聞きながら Σk^2 の公式を板書したため、板書を参考に一般化に取り組む生徒が多かった。生徒の解法を全体に提示したことは、 Σ の公式を確認するきっかけにはなったが、今回は上手く利用できなかったため、考えを広げ一般化する手立てにはならなかった。

図4 Σ の公式を利用した生徒の解答

(3) 一般化する場面

分割数を増やした長方形の様子をfunctionviewで見せた(図5)。内側と外側から挟んで評価する印象を付けるために、アルキメデスの「取り尽くし法」をプレゼンテーションソフトで提示した(図6)。

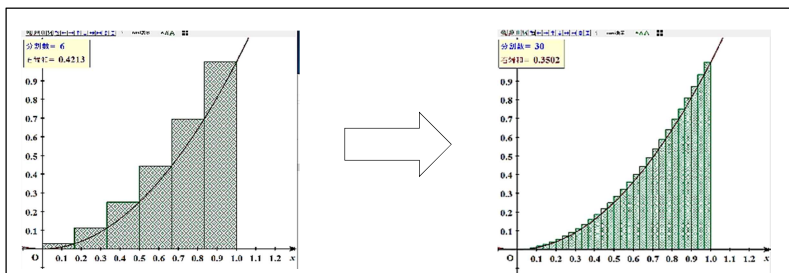


図5 functionview



図6 「取り尽くし法」の提示

次に、右端和と左端和でそれぞれ n 分割した長方形の様子がかかっているワークシートを配り、長方形の面積の和と $n \rightarrow \infty$ のときの極限を求めさせた(図7)。右端和での n 分割の場合のみ生徒に立式を板書させ、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限が、曲線で囲まれた部分の面積と一致することを確認し残りは宿題とした。途中で終わってしまったため、具体例にどれほど効果があったのか、一般化で計ることができなかったが、授業中の気付きをメモする欄には、「数列の考え方」という記述があった。

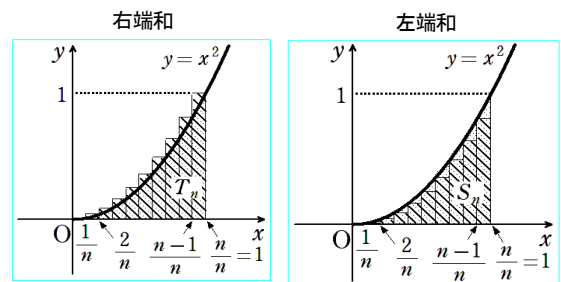


図7 n 分割時の右端和と左端和

5 考察

授業後の生徒アンケートから、思考力を高めるための視覚的アプローチは、ある程度有効であったと考える(表1)。functionviewを利用したことで、手軽に板書では敵わない美しさで図形の変化を見取ることができ、区分求積法を直観的に理解させることができた。ICT機器を利用するタイミングや、発問を工夫することで、理解を深めるだけでなく、思考力を高めるために視覚的アプローチが有効となると考える。

ただし、今回は解法が限定される題材であったため、多様な考えを引き出すような形での思考力の育成にはつながらなかった。今後は、問題の精選や生徒の活動の把握に努めながら、必要な場面でのICT機器の活用を積極的に行っていきたい。

表1 授業後の生徒アンケート結果より

問題を考える際に…	思う	どちらでもない	思わない
区分求積法の説明で見たグラフ(長方形の面積の和の変化)は必要だったと思うか。	85%	12%	3%
友達の書いた式やグラフ、図などを投影し、みんなで共有したことは必要だったと思うか。	73%	21%	6%