群教セ	G03 － 04
	令元.272集
	数学ー高

高校数学において、問題文を読み解き、解答の道筋を作っていく力を養う指導の工夫

――生徒の試行錯誤を促す「キーワード」と気付きを整理する「共有活動」の活用を通して――

特別研修員　近江　俊哉

Ⅰ　研究テーマ設定の理由

平成31年度県立学校教育指導の重点では、数学の目標として「事象を数学化したり数学的に考察し表現したりする力を育成するとともに、数学のよさを認識し、積極的に数学を活用したり数学的論拠に基づいて判断したりする態度や創造性の基礎を養う」を掲げている。生徒には、問題解決の見通しをもつとともに、確かな根拠から論理的に考察する力が必要であると考える。

研究協力校（以下、協力校）の生徒は、教科書の例題レベルの問題にはよく取り組み、定着レベルも高い。一方で発展レベルの問題に対して、自ら取り組み、解答の道筋を見付けていくことを苦手としている生徒が多い。本研究では、そのような生徒が、自ら考え、問題に取り組み、やがては問題解決ができるようになることを目指す。問題文を見て、何をしたらよいか分からず動き出せない生徒が、何かしらアクションを起こして自力で問題に向き合うことを通して、考える道筋を思い付くようになることが本研究のねらいである。

Ⅱ　研究内容

1　研究構想図

２　授業改善に向けた手立て

生徒が自ら考え、解答の道筋を見付けていくために、以下の二つの手立てを講じる。

手立て１　生徒の試行錯誤を促すキーワード「AGAKI」の活用
手立て２　生徒の気付きを整理する「共有活動」の活用

手立て１は、発展問題を前に、解き方のアイデアが思い浮かばず手が止まってしまう生徒が、何かしらのアクションを起こせるように手助けすることである。生徒には、発展問題に取り組む方法を、以下に示すキーワード「AGAKI」にして伝え、ワークシートを活用し、「AGAKI」のいずれかを実践するよう指導する（図１）。

A　与えられた問題文は全て使う。
G　具体的に考えて法則を見付ける。
A　後のことを考え過ぎずに取り組む。
K　結論から考える。
I　以前解いた問題に帰着させる。

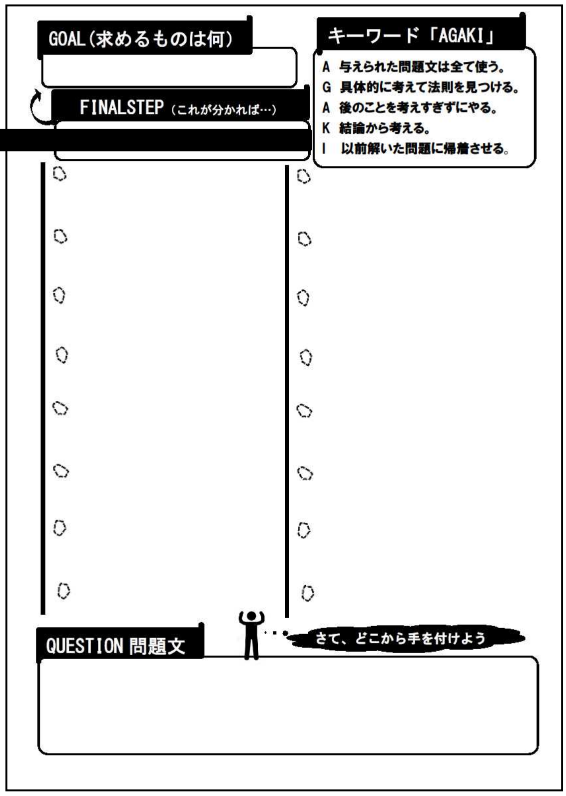

図１　「AGAKI」実践のためのワークシート

ワークシートは、様々な「AGAKI」が実践しやすいように、自由に書き込める体裁とした。生徒には、解答への設計図を作るために使用することを強調し、まずはワークシートに書いてみることの重要性を繰り返し伝える。考えをワークシートに書き込んでいくことで、後で見たときに思考の流れを俯瞰することもできる。

手立て２は、手立て１で個人個人がキーワードを用いて考えたことを整理する機会を与えることである。キーワードを用いて生徒がそれぞれ考えるだけで、解答までたどり着くとは限らない。そこで、４人ずつのグループを作り、手立て１で考えたことを発表したり、解答にたどり着くには何が重要かを話し合わせたりすることとした。その後、必要に応じて教員主導で説明したり、クラス全体で意見を共有したりすることで、解答までたどり着かせる。教員は、答えを教えるのではなく、「どうしてそれを求めたの？」「そこから何ができる？」「何が分かれば答えまでたどり着ける？」などの声掛けをする。ここでは、十分な教材研究はもちろん、生徒の姿を想定し、その対応策としての声掛けを具体的に考えておく。

Ⅲ　研究のまとめ

１　成果

○　全体の97%の生徒が問題に取り組みやすくなったと感じていた。

○　発展問題に対して、キーワード「AGAKI」を基にして、与えられた問題文を数式化したり、具体的に数値を入れてみたりして考えることで、初めから手が止まって何もできない生徒がいなくなった。

○　振り返りシートに「グループや、クラス全体での共有活動を通して、解答までの道筋を考えることができた」と記述した生徒が多数いた。

２　課題

○　演習を繰り返すことで、手立ての効果が向上することが予想され、今後も継続して取り組む必要がある。そのためには、授業で扱う問題を精選したり、年間を見通した計画を立てたりして、生徒の活動時間を確保することが必要である。

実践例

１　単元名　　数学Ｂ　「数列（漸化式と数学的帰納法）」（第２学年・２学期）

２　本単元（題材）について

この単元では，漸化式で表された簡単な数列と、数学的帰納法を取り扱う。漸化式では、前の項と次の項の関係性から、一般項を求めることができることを学ぶ。それを踏まえ、一般的に、n 番目と n+1 番目の関係から全体像を捉えることができるようになることを目標とする。数学的帰納法では、自然数 n についての等式や不等式が、全ての自然数 n について成り立つことを証明する。ここでも、n 番目と n+1 番目の関係性に着目することで、全ての自然数について証明することができることの有用性を認識することができる。数列の考え方を基にして、日常生活の中で、前後の関係から生まれる法則や性質を数学的に捉え、考察・活用していく力を養うことにつながる。

目標		・数列の考え方を用いて様々な問題を解決しようとする態度を身に付けさせる。（関心・意欲・態度） ・漸化式を用いて、複雑な問題を解決することができるようにさせる。（数学的な見方や考え方） ・数学的帰納法を用いて、等式や不等式の証明ができるようにさせる。（数学的な技能） ・漸化式や数学的帰納法の仕組みや考え方を理解させる。（知識・理解）
評価規準	関心・意欲・態度	数列の考え方を用いて問題を解決しようとする態度を身に付けようとしている。
	数学的な見方や考え方	事象の変化の規則性を数学的に表現し、数列の知識を用いてそれらを考察している。
	数学的な技能	代表的な漸化式から一般項を求めている。 数学的帰納法を用いて、等式や不等式が成り立つことを証明している。
	知識・理解	数学的帰納法の仕組みを理解している。
時間		主な学習活動
第１～ 第５時		・代表的な漸化式の解法を理解する ○等差数列タイプ　○等比数列タイプ　○階差数列タイプ ○特性方程式を解くタイプ
第６～ 第９時		・数学的帰納法を使って以下の証明を行う。 ○等式の証明　○不等式の証明　○整数の性質に関する証明 ○数列の一般項の推測とその証明
第10 ～ 第11時		・複雑な漸化式の解法を理解する。 ○隣接三項間タイプ　○分数タイプ　○連立タイプ ○ｎ+1乗で割るタイプ　　など
第12～ 第13時		・漸化式を使って複数の分野に関係する問題に取り組む。 ○確率漸化式

３　本時及び具体化した手立てについて

本時は全 13 時間計画の第 12 時に当たる。n 回目のときの確率と n+1 回目のときの確率との関係を考えることにより、確率を求めていく問題（確率漸化式）を扱う。この確率漸化式は、確率の問題を数列の知識を使って解く必要があり、これを扱う問題のレベルは高いものとなる。生徒は複数の分野に関係する問題を解いた経験が少ないので、対応に苦慮することが予想される。通常は、教員が解法を示し、生徒が演習をするという流れで扱うことの多い問題であるが、今回は生徒がキーワードと共有活動を活用して考える中で、n 回目の確率と n+1 回目の確率の関係を求めることを通し、漸化式の考え方が利用できることに気付いてほしい。

手立て１　生徒の試行錯誤を促すキーワード「AGAKI」の活用

「AGAKI」の一つである「G：具体的に考えて法則を見付ける」を意識することで、１回目の確率 P_1、２回目の確率 P_2、３回目の確率 P_3 を具体的に求めることができると予想する。ここから、１回前の確率を使って次の確率を求められることに気付くことが理想的である。

手立て２　生徒の気付きを整理する「共有活動」の活用

手立て１で、キーワードとワークシートを使うことで、１回目の確率 P_1、２回目の確率 P_2、３回目の確率 P_3 を具体的に求めたが、その先につながらない生徒がいることも予想される。グループ別にアイデアを出し合い、協議する中で、その先に進んでいくことができるとよい。また、今回の問題で、解答を求めるまでに必要なステップを以下の五つに分けて、その到達段階別に、生徒の変容を踏まえて声掛けをしていく。

五つのステップ（以下②、③などは五つのステップのことである）

①その点にとどまる確率は 2/3、他方の点に移る確率は 1/3 であることがまとめられている。
②場合分けの考え方を用いて、具体的な確率（P_1，P_2，・・・）が求められている。
③一つ前の確率を用いて、具体的な確率（P_1，P_2，・・・）が求められている。
（例：P_3 の結果を用いて P_4 を求める）
④具体例を一般化し、漸化式が導出できている（P_n を P_{n-1} と $(1-P_{n-1})$ を用いて表すことができる）。
⑤漸化式を解き、P_n が求められている。

４　授業の実際

本時では以下の問題を扱う。

問題

２点Ａ、Ｂの上を交互に移る点Ｐがある。点Ｐはさいころを１回投げるとき、１，２，３，４の目が出るとその点にとどまり、５，６の目が出ると他方の点に移る。さいころを n 回投げた後にＰがＡにある確率を P_n とする。ただし、Ｐははじめ A にあるものとする。P_n を求めよ。

授業の流れは以下のとおりである。

課題を確認する	・・・５分
キーワードを意識して個人で問題に取り組む	・・・10 分
グループや全体で共有活動を行う	・・・35 分
振り返りシートを記入する	・・・５分

図２　個人で問題に取り組む生徒

手立て１　生徒の試行錯誤を促すキーワード「AGAKI」の活用

上記の漸化式を使って考える確率の問題に対して、ワークシートを用いて個人で問題に取り組んだ（図２）。問題の難易度は高いが、手が止まっている生徒はおらず、全員が何かしらのアクションを起こせていた（図３）。中でも、ほとんどの生徒が、「G：具体的に考えて法則を見付ける」に取り組み、P_1、P_2、P_3 までは求められていた。五つのステップのうち、②までは自力解決できていたことになる。また、個人で問題に取り組む時間で、ステップ③までできていた生徒はほとんどいなかった。

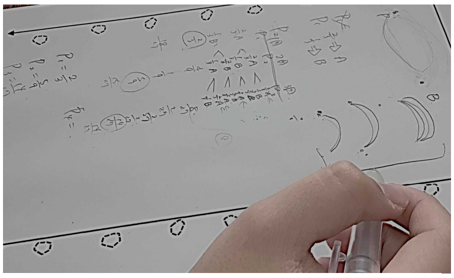

図３　生徒のワークシート

手立て２　生徒の気付きを整理する「共有活動」の活用

図４　班別に協議する生徒の様子

続いて、グループを作り、自由に相談しながら問題に取り組んだ。個人で問題に取り組んだ段階での生徒の方向性や到達度は様々なので、ここで、自分の考えをアウトプットしたり、他人の考えを聞いたりして、考えをまとめていく（図４）。今回の問題では、前ページで示した五つのステップのうち、②から③へステップを進めるところが最も高いハードルであると考えられる。②を進めていくと、複雑さを増していくことを確認し、P_2 を使って P_3 を表すことができないかを生徒に問い掛けた。全てのグループが③に到達することはできなかったが、全体で確認することにより、ほとんどの生徒が理解することができた。ステップ③以降は、生徒が協力して最後まで解答を求めることができていた。

最後の５分で、振り返りシート（図５）を用いて、振り返りを行った。

５　考察

漸化式の考え方を用いて確率の問題を解く（確率漸化式）という難易度の高い問題を扱ったが、生徒は問題に対して前向きによく取り組んでいた。キーワードや共有活動が、生徒のやってみようという気持ちを後押ししたと感じた。実際に、授業後に「ワークシートを用いることで、発展問題に取り組みやすくなったか」を調査したところ、図６のような結果となった。ワークシートを使うことで、生徒は問題に取り組みやすくなったと考えられる。また、「今日の授業を終えて、今後に生かせそうなことをまとめよう」という自由記述に対して、図５の生徒のように、「AGAKI」の実践（２ページ図１）により、これから発展問題に取り組むときに、なんらかのアクションを起こしていけそうだ、という内容の記述を行った生徒は、23 人（全体の 69%）いた。以前は、発展問題を前にして、手が動かせない生徒が多かったが、今後発展問題に取り組むときに、キーワード「AGAKI」を思い出して、なんらかのアクションを起こすことができそうだと感じた。

振り返りシート　　組　番　氏名

○ボルダリングシートを用いることで、発展問題に取り組みやすくなったか？

変わらない　　少し取り組みやすくなった　　取り組みやすくなった

○今日の授業のポイントや感想を簡単にまとめよう

余事象の考え方を使えれば、問題が解決できた。
頭を柔らかく使って様々な角度から考えていきたい。

○今日の授業を終えて、今後に生かせそうなことをまとめよう。

発展問題に取り組むときに、初めからあきらめてしまうことが多いが、とりあえず数値を代入してみたり、知っている知識などを試したりすることで、解答に近づいていくので、何かしらやってみるという姿勢が大切だと思った。

図５　振り返りシート（打ち直したもの）

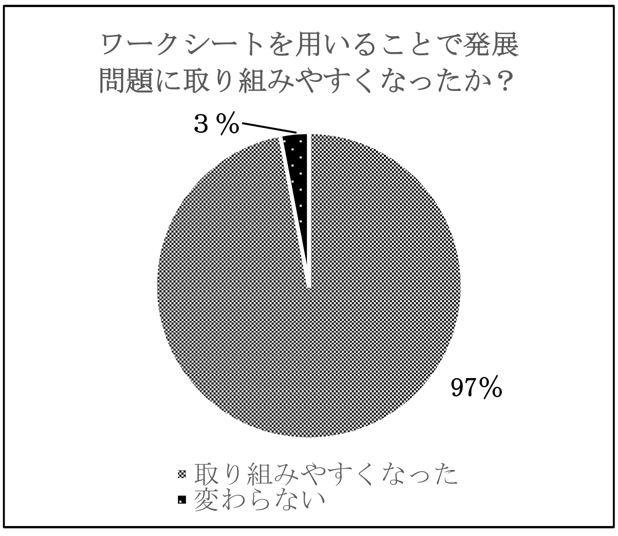

図６　調査結果

今回の実践授業では、手立て２において、４ページのステップ２までは、ほとんどの生徒がたどり着いていた。しかし、ステップ３にたどり着いた生徒はほとんどいなく、対応に苦慮した。生徒自身でステップ３までたどりつくような適切な声掛けを準備しておくべきであった。課題はあったが、手立て２の「共有活動」を行うことで、自分一人では気付けなかったことに気付き、問題解決まで至る経験を生徒は得た。今後、同じような経験を積んでいくことで、発展問題に取り組むときに、自分の中で、共有活動で行ったような思考を行い、様々な角度から考えられるようになるとよい。

６　資料

実践授業で、生徒が実際に記入したワークシートを打ち直したものです。

GOAL（求めるものは何）

Ｐｎ　を求めたい。

FINALSTEP（これが分かれば…）

キーワード「AGAKI」

A　与えられた問題文は全て使う。
G　具体的に考えて法則を見つける。
A　後のことを考えすぎずにやる。
K　結論から考える。
I　以前解いた問題に帰着させる。

１回投げたとき

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

２回投げたとき

$$\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{9}$$

３回投げたとき

$$\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}\times 3=\frac{17}{24}$$

A　　B

４回投げたとき

$$\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\cdots$$

３回投げたとき、

$$P_3=P_2\times\frac{2}{3}+(1-P_2)\times\frac{1}{3}$$

$$P_{n+1}=P_n\times\frac{2}{3}+(1-P_n)\times\frac{1}{3}$$

$$P_{n+1}=\frac{1}{3}P_n+\frac{1}{3}$$

$$P_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(P_n-\frac{1}{2})$$

$$P_n=\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{2}$$

さて、どこから手を付けよう

QUESTION 問題文

２点Ａ、Ｂの上を交互に移る点Ｐがある。点Ｐはさいころを１回投げるとき、１，２，３，４の目が出るとその点にとどまり、５，６の目が出ると他方の点に移る。さいころをｎ回投げた後にＰがＡにある確率をＰｎとする。ただし、ＰははじめＡにあるものとする。Pnを求めよ。