

数 学 科 学 習 指 導 案

単元名「場合の数(数学A)」

令和6年10月 第1学年 指導者 貞形 大樹

I 単元の構想

1 単元観

本単元に関わる内容として、小学校では具体的な事柄について「起こり得る場合」を順序よく整理して調べることを取り扱っている。また、中学校では、樹形図などを利用して起こり得るすべての場合を列挙することができる程度の事象について、起こり得る場合を順序よく整理し数え上げることによって確率を求めるを取り扱っている。本単元では、これらを基に、場合の数をもれなく重複なく数え上げる上での基本的な考え方を「数え上げの原則」として整理する。場合の数を求める方法を多面的に考察する基礎を養う。また、円順列、重複順列、同じものを含む順列などを取り扱う場合の指導に当たっても、公式を導く過程を振り返らせ、どのような見方や考え方をしたのかを確認して、そこで働く数学的なものの見方や考え方を養う。

2 研究との関わり

研究主題は「高校数学において、問題を自分事化して取り組む生徒の育成 — 「誤った考え方」の活用と学習環境の工夫を通して—」である。本研究において「自分事化して取り組む」とは、「数学の問題を、ただ与えられたものとして取り組むのではなく、自分の課題だと感じ、自分や仲間と考え、工夫しながら解決しようとする」と定義する。生徒が問題を自分事化して取り組むことで、高等学校数学科の目標である「問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度」が育成されると考え、主題を設定した。問題を自分事化して取り組む生徒を育成するために、以下の手立てを講じる。

(1) 「誤った考え方」の活用

本時では「赤玉1個、青玉2個、白玉3個をつなげて首飾りを作ると何通りの首飾りができるか」という問題を用いて、同じものを含むじゅず順列の総数を求める方法について考察する。この問題は、左右非対称な首飾りと左右対称な首飾りのパターンを分けて考える必要がある。左右非対称な場合は円順列の総数を2で割るじゅず順列の考え方を用いるが、左右対称な場合は裏返しても変わらないのでじゅず順列の考え方を使うことができない。しかし、多くの生徒が左右対称な場合を考えせず、この問題の円順列の総数を単純に2で割る「誤った考え方」を用いて解くことが予想される。教師があらかじめ予想した、生徒が間違えやすい「誤った考え方」を教員が提示することで、「なぜ」と生徒たちの心を揺さぶり、「解きたい」という気持ちにさせる効果が期待できる。生徒が間違えやすい「誤った考え方」を通して問題を自分事化し、自ら考えて取り組むことができる生徒の育成を目指す。

(2) 学習環境の工夫

解法を理解するための手助けとなる教材を教室内に設置する。教材は、ホワイトボード、補助カード、具体物を用意する。その際、(1)で扱った「誤った考え方」を基に、協働的に学ぶことができる時間を取り入れる。個人の活動だけでは問題が解けなかったとき、教材を用いて問題を解決することができる。(1)で自分事化した気持ちを継続させる効果が期待できる。

3 単元の目標及び生徒の実態

	目 標	生徒の実態
知識及び技能	・場合の数についての基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに、事象を数学化したり、数学的	・中学校で習った樹形図や二次元の表などを利用して、サイコロの目の出方やカードの並べ方など、同様に確

	に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付ける。	からしい起こり得る全ての場合を求めることができる。
思考力、判断力、表現力等	・事象の構造などに着目し、場合の数を求める方法を多面的に考察する力を身に付ける。	・根拠を明確にしながら、自分の考えを表現することが苦手な生徒が多い。 ・数学に対して苦手意識を感じている生徒が多いが、周囲と協力して頑張る姿が見られる。
学びに向かう力、人間性等	・場合の数について、数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度、粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度、問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度を身に付ける。	

4 評価規準

知識・技能	・集合の要素の個数に関する基本的な関係や和の法則、積の法則などの数え上げの原則について理解している。 ・具体的な事象を基に順列及び組合せの意味を理解し、順列の総数や組合せの総数を求めることができる。
思考・判断・表現	・事象の構造などに注目し、場合の数を求める方法を多面的に考察することができる。
主体的に学習に取り組む態度	・事象を場合の数の考え方を用いて考察するよさを認識し、問題解決にそれらを活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようしたりしている。 ・問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。

5 指導及び評価、ICT活用の計画（全15時間：本時第14時）

時間	■ねらい □学習活動 ★ICT活用に関する事項	知 思 態	◆評価項目＜方法（観点）＞ ○指導に生かす評価 ●評定に用いる評価
1	■和集合、補集合の要素の個数を求めることができるようとする。 □図を活用し、記号を用いて和集合の要素の個数を式で表す。	○	◆集合の要素の個数についての基本的な概念、用語・記号を理解し、基礎的な知識を身に付けている。 ＜ワークシート（知）＞
2	■樹形図を用いて場合の数を求めることができるようとする。 □樹形図を用いて、重複することなく数え上げていく。	○	◆数え上げの原則の考え方を身に付け、樹形図を用いて場合の数を求めることができる。 ＜ワークシート（知）＞
3	■和の法則、積の法則の考え方を身に付け、具体的な事象について考察することができるようとする。 □和の法則、積の法則を理解し、場合の数を求める。	○	◆和の法則や積の法則の考え方を身に付け、具体的な事象についてそれらを用いて考察することができる。 ＜ワークシート（思）＞
4	■整数の正の約数の個数とその和の求め方を理解し、考察することができるようとする。 □式の展開や素因数分解を用いて正の約数の総和を求める。	○	◆積の法則を利用して、整数の正の約数の個数やその総和を考察することができる。 ＜ワークシート（思）＞

5 ・ 6	<p>■順列の考え方を用いて場合の数を求めるができるようとする。</p> <p>□順列の考え方を理解し、P(順列)や！(階乗)を活用して問題を解く。</p>	<input type="radio"/>		<p>◆順列についての基本的な概念、用語・記号を理解し、基礎的な知識を身に付けている。</p> <p><ワークシート(知)></p>
7	<p>■円順列・じゅず順列について理解し、場合の数を求めるができるようとする。</p> <p>□円順列において、回転させると同じ並び方になるものがいくつあるか調べる。</p>	<input type="radio"/>		<p>◆円順列・じゅず順列の考え方を身に付け、総数を求めるができる。</p> <p><ワークシート(知)></p>
8	<p>■重複順列について理解し、具体的な事象についてそれらを用いて考察するができるようとする。</p> <p>□重複順列の考え方を理解し、問題を解く。</p>	<input type="radio"/>		<p>◆重複順列の考え方を身に付け、具体的な事象についてそれらを用いて考察するができる。</p> <p><ワークシート(思)></p>
9	<p>■組合せの総数についての性質を利用して、場合の数を求めるができるようとする。</p> <p>□順列と組合せの考え方の違いについて考察し、C(組合せ)を活用して問題を解く。</p>	<input type="radio"/>		<p>◆組合せについての基本的な概念、用語・記号を理解し、基礎的な知識を身に付けている。</p> <p><ワークシート(知)></p>
10	<p>■組合せの考え方を利用して場合の数を求めるができるようとする。</p> <p>□正多角形の頂点をいくつか選び、線でつなげるとできる図形の個数を求める。</p>	<input type="radio"/>		<p>◆様々な組合せの総数の考察に、nCrの記号を活用している。</p> <p><ワークシート(思)></p>
11	<p>■同じものを含む順列について理解し、具体的な事象についてそれらを用いて考察するができるようとする。</p> <p>□碁盤の目の道を移動する道順の総数の求め方を考察する。</p>	<input type="radio"/>		<p>◆同じものを含む順列の考え方を身に付け、具体的な事象についてそれらを用いて考察するができる。</p> <p><ワークシート(思)></p>
12	<p>■重複を許して取る組合せの考え方を用いて問題を考察するができるようとする。</p> <p>□同じものを含む順列の求め方を考察する。</p>	<input type="radio"/>		<p>◆重複を許して取る組合せの考え方を用いて問題を考察するができる。</p> <p><ワークシート(思)></p>

13	<p>■同じものを含む円順列を求める上での要点を理解し、考え方を説明・考察できるようにする。</p> <p>□円順列において、円形に並べるときにはどの玉を固定するのがよいか考え、総数を求める。</p>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<p>◆円順列や同じものを含む順列の考え方について、同じものを含む円順列の解き方を考察することができる。</p> <p><ワークシート（思）></p> <p>◆数学のよさを認識し、数学を活用しようとしたり、粘り強く考え方の根拠に基づいて判断しようとしたりしている。</p> <p><行動観察・ワークシート（態）></p>
14 (本時)	<p>■同じものを含むじゅず順列を求める上での要点を理解し、考え方を自分の言葉で説明できるようにする。</p> <p>■「誤った考え方」を通して、問題解決の過程を振り返って考察し、評価・改善することができる。</p> <p>□同じものを含むじゅず順列の総数を求める。 (★)</p>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<p>◆同じものを含むじゅず順列の問題において、左右対称・非対称に場合分けをして解く考え方について数学的な言葉を用いて表現することができる。</p> <p><ワークシート（思）></p> <p>◆問題解決の過程を振り返って考察しようとしている。</p> <p><行動観察・ワークシート（態）></p>
15	単元のまとめ	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<p>◆集合の要素の個数に関する基本的な関係や和の法則、積の法則などの数え上げの原則について理解している。</p> <p><単元テスト（知）></p> <p>◆具体的な事象を基に順列及び組合せの意味を理解し、順列の総数や組合せの総数を求めることができる。</p> <p><単元テスト（知）></p> <p>◆事象の構造などに注目し、場合の数を求める方法を多面的に考察することができる。</p> <p><単元テスト（思）></p>

II 第14時の学習

1 ねらい 同じものを含むじゅず順列の総数の求め方を考察する活動を通して、解き方や考え方の要点をおさえ、その解法に必要な考え方を数学的に表現することができるようとする。

2 展開

主な学習活動 予想される生徒の反応 [S] ★ICT活用に関する事項	◎研究上の手立て ○指導上の留意点 ◆評価項目（観点）
<p>1 前時の内容を復習する。 (導入8分)</p> <ul style="list-style-type: none"> 問題を解く。 <p>＜問題1＞ 赤玉1個、青玉2個、白玉3個を1列に並べる方法は何通りできるか。</p> <p>＜問題2＞ 赤玉1個、青玉2個、白玉3個を円形に並べる方法は何通りできるか。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 生徒が既習事項を確認できるように、同じものを含む円順列の求め方の復習を行う。 個人で問題を解かせる時間と、周りと協力してもよい時間を分けて設定する。 T：「やり方を忘れてしまった人は周りの人と協力して答えを出してみよう」
<ul style="list-style-type: none"> 解答の確認を行う。 <p>（1の解答） $\frac{6!}{2!3!} (6C3 \times 3C2 \times 1C1) = 60$ <u>60通り</u></p> <p>（2の解答） 赤玉1個を固定して考えると残り5個の並べ方は$\frac{5!}{2!3!} (5C2 \times 3C3) = 10$ <u>10通り</u></p> <p>★解説をスクリーンに投影する。</p> <p>2 本時の問題を解く。 (展開①13分)</p> <ul style="list-style-type: none"> 問題を解く。 <p>＜問題＞ 赤玉1個、青玉2個、白玉3個をつなげて首飾りを作ると何通りの首飾りができるか。</p> <p>S：左右対称なものと非対称などを場合分けする、正しい解き方をする。 S：じゅず順列の考え方で導入の問題の答えを2で割る。 S：思い付く首飾りのパターンの絵を書いて確かめる。 S：分からぬ。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 同じものを含む順列の考え方や円順列の考え方を用いて解くことを確認する。 生徒が自力で本時の問題の解き方を考察できるように、解き方についての助言を最低限に控える。 T：「今までの知識を使って解いてみよう。」 個人で解く時間をとる。その後問題の把握のため生徒の手を止めさせ教員が説明する。 T：「さっきの問題とどこが違う？」 T：「求め方はどのように変わってくる？」 再度考える時間をとり、机間指導の中で生徒の考えを確認する。

<p>・先生の解答を確認する。</p> <p><誤った考え方></p> <p>赤玉 1 個を固定して考えると残り 5 個の並べ方は $\frac{5!}{2!3!} (5C_2 \times 3C_3) = 10$</p> <p>じゅず順列の考え方を用いると求める場合の数は $10 \div 2 = 5$ <u>5通り</u></p> <p>★誤った考え方をスクリーンに投影する。</p> <p>S : 同じ答えになる。</p> <p>S : 誤った考え方納得する。</p> <p>S : 誤った考え方よく分からぬ。</p>	<p>◎「誤った考え方」をプロジェクターで写し、解答が合っているかのように解説する。</p> <p>T : 「私はこのように考えました」</p> <p>T : 「じゅず順列だから最初の円形の問題の答えを 2 で割ればいいよね？」</p> <p>○解答が誤っていることを伝える。</p> <p>T : 「この解答は間違います」</p> <p>T : 「どこが間違っているかな？」</p>
<p>3 誤答をもとに本時の問題を解決するための考え方を理解する。</p> <p>(展開②24分)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・グループもしくは個人で考える。 <p>S : 左右対称のものと裏返すと同じものがあることに気が付く。</p> <p>S : 思い付く首飾りのパターンの絵を書いて確かめる。</p> <p>S : ホワイトボードや黒板を使って分からぬ生徒に説明する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・正しい解答を確認し、誤った解答と何が違うのかを考える。 <p><正しい解答></p> <p>赤玉 1 個を固定して考えると残り 5 個の並べ方は $\frac{5!}{2!3!} (5C_2 \times 3C_3) = 10$</p> <p>そのうち左右対称になるものは 2 通り よって左右対称でない円順列は $10 - 2 = 8$ (通り)</p> <p>したがって、首輪の作り方は $2 + \frac{8}{2} = 6$ <u>6通り</u></p>	<p>◎対話的な学びを促したり、問題解決の過程を振り返ったりするように、「誤った考え方」から何が間違っているか、どのようにしたら正しい解答になるかを考えよう促す。</p> <p>◎問題解決の手助けとなるように、解法を理解するために設置されている道具(ホワイトボード、ヒントが書いてあるカード、具体物)を用いてもよいことを伝える。</p> <p>○生徒自身または生徒たちで解決できるように見守る。</p> <p>○問題が解けている生徒を指名し、どのように解いたか、どこが間違えていたかを説明してもらう。</p> <p>○生徒の説明後、聞いている他の生徒が分かっていない様子であれば、不十分なところを補うように教員が解答をスクリーンに写して説明する。</p>
<p>S : 左右対称のものと裏返すと同じものがあることに気が付く。</p> <p>S : 黒板を使って分からぬ生徒に説明する。</p> <p>S : 周りと確認する。</p>	<p>○早くできた生徒に、新たな問い合わせを与える。</p> <p>T : 「玉の数が増えても解けるかな？」</p>

4 同じものを含むじゅず順列のポイントについてワークシートにまとめ、周りと共有する。
(終末5分)

ワークシートにある質問文
「どのような点に気を付けて解けばよいか？」

○ワークシートに記入したまとめを生徒同士で共有するよう促す。

◆評価項目

同じものを含むじゅず順列の問題において、左右対称・非対称に場合分けをして解く考え方について数学的な言葉を用いて表現することができる。

<ワークシート（思）>
問題解決の過程を振り返って考察しようとしている。

<ワークシート・行動観察（態）>

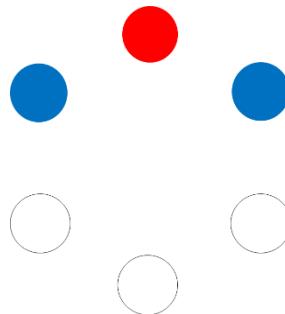
3 板書計画

<問題>

赤玉 1 個、青玉 2 個、白玉 3 個を円形に並べる方法は何通りできるか。

赤の玉を固定して、残り 5 個を並べると考えて

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ (通り)}$$

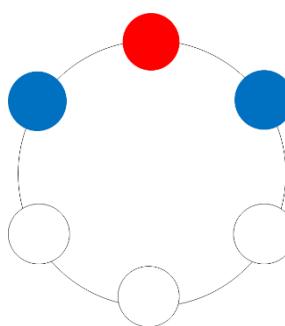


<問題>

赤玉 1 個、青玉 2 個、白玉 3 個をつなげて首飾りを作ると何通りの首飾りができるか。

<誤った考え方>

赤玉 1 個を固定して考えると残り 5 個の並べ方は $\frac{5!}{2!3!} (5C_2 \times 3C_3) = 10$
じゅず順列の考え方を用いると求める場合の数は $10 \div 2 = 5$ 5通り



<正しい解答>

赤玉 1 個を固定して考えると残り 5 個の並べ方は $\frac{5!}{2!3!} (5C_2 \times 3C_3) = 10$

そのうち左右対称になるものは 2 通り

よって左右対称でない円順列は

$$10 - 2 = 8 \text{ (通り)}$$

したがって、首輪の作り方は

$$2 + \frac{8}{2} = 6 \quad \underline{6 \text{通り}}$$

