群教セ	E03 － 03
	平 26.254 集
	数学ー高

高校数学科において多角的に問題を捉えることができる力を育てる指導の工夫

── 別解を考えさせるための発問の工夫を通して ──

特別研修員　折田　直樹

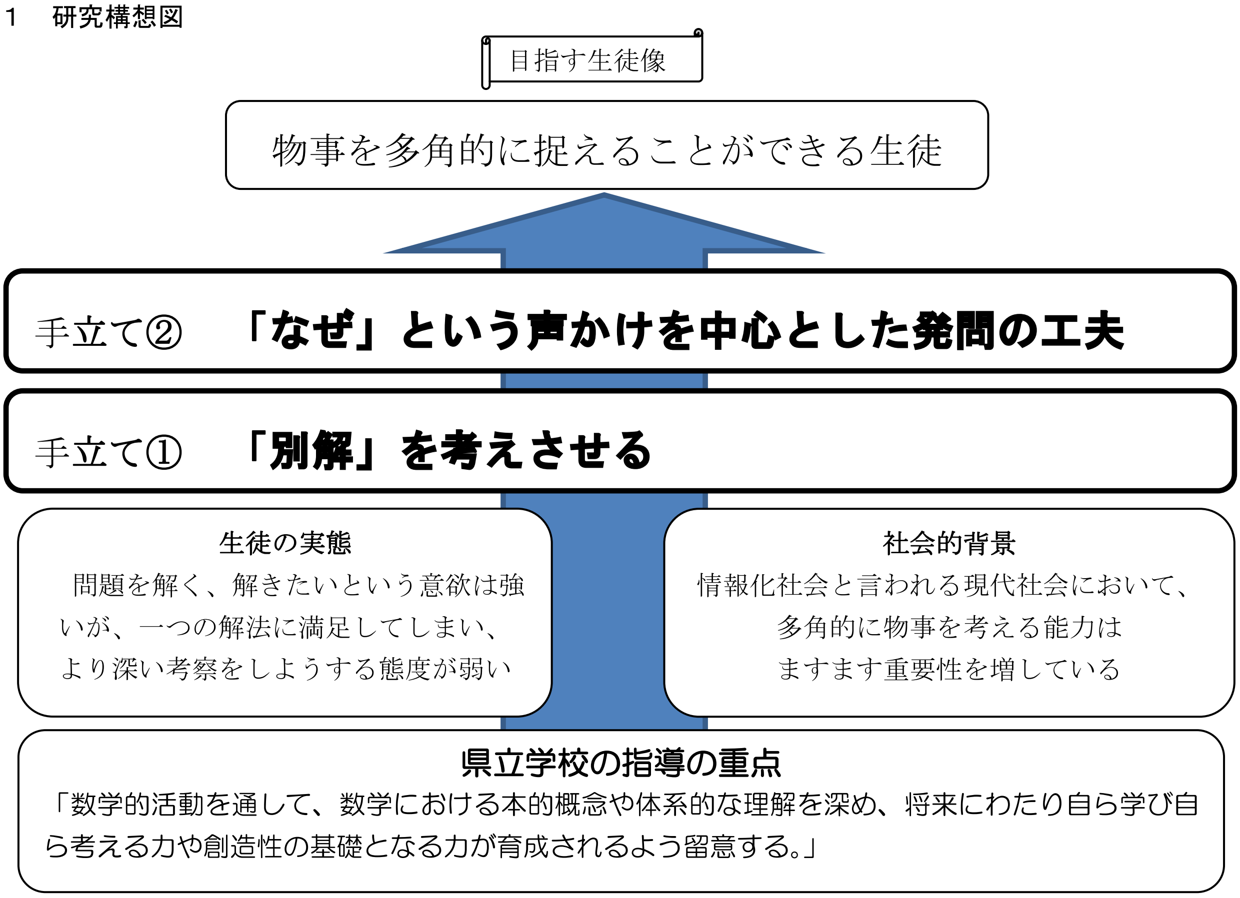
Ⅰ　研究テーマ設定の理由

日々の授業の中や生徒の質問する姿勢や態度から、「なんとかして理解したい」「解きたい」といった強い意思を感じている。また標準クラスでの授業中にやや発展的な内容を示した場合でも、すべて理解しようと取り組む姿が見受けられる。このように学びに対して積極的な姿勢が見られる反面、気になることもある。それは一つの解法に満足してしまい、さらに別解を考えることを通して、問題に対してより深い考察をしようする態度が弱いことである。

「数学の本質はその自由性にある」という言葉に表されるように、数学の問題の解法は一つではなく、視点の変化によって多くの別解が存在することが多い。そして、むしろ別解に本質が潜んでいることも少なくない。数学において別解を考えることは多角的に物事を考えることであり、その重要性を否定することはできない。また、情報化社会と言われる現代社会において、多角的に物事を考える能力はますます重要性を増していくと考えられる。以上のような問題意識から、テーマを「高校数学科において多角的に問題を捉えることができる力を育てる指導の工夫」とした。

Ⅱ　研究内容

1　研究構想図



２ 授業改善に向けた手立て

⑴ 単元名　数学Ａ　場合の数と確率　（第４学年・１学期）

ここでは、確率の総復習でもある「期待値」の授業において、反復試行や余事象といった基本的な事項を復習しながら、教科書に記載されている解法とは別の解法の概念を活用した解答を作成することをねらいとして以下の点に留意して実践を試みた。

実践１における研究上の手立て ○　生徒とのやりとりを中心に授業を行い、その中から別の解法の切り口を生徒に気付かせる。 ○　「なぜそのような結果になったのか」等、生徒への発問と声かけを充実させる効果的な声かけを行う。

簡単な期待値の問題から行ったので生徒の理解力は高く集中も保たれている状態であった。生徒とのやりとりを中心に行い、既習事項を活用した別解など、生徒から積極的に発言してくれていたが、最後の問題はかなり難易度も高く計算力も要求されている問題であったので、立式は出来るが計算できなくなり、手が止まってしまう生徒が多く出てしまった。別解の有用な問題を意識してしまったため、生徒の実力と問題の難易度が一致していなかった。そこで、次の実践においては問題の精選をし、別解の美しさや有用性を感じ取ることができる問題を示した。

⑵ 単元名　数学Ⅱ　図形と方程式　（第４学年・２学期）

実践２における研究上の手立て ○　個別学習が中心ではあるが、生徒とのやりとり（全体指導・個別指導）を密に行い、別解を導き出すような発問を行う。

軌跡の問題を２問掲示し、第１問は全体で確認しながら（生徒とのやりとりを中心に）進めていき、第２問は第１問の類題であるので、机間指導で声かけをしながら個別学習中心に行った。第２問は代数的な手法で解答していくと計算力が要求されるが、幾何的な解法を試みるとてもすっきりとした解法になる。生徒にはその別解に気付かせたかったが、時間的に余裕がなくなり、最後は教師側から導く形になってしまった。

Ⅲ　研究のまとめ

１　成果

○　個別学習において、生徒は「他に解答はないのか」と自ら別解を探すことが出来るようになってきた。また、自分にとってよりよい解法を導く努力をし、様々な解法から取捨選択してベストな解法を導けるようになってきた。

○　問題を解くのにあたり、その問題は何を求めているのか、少しずつではあるが、冷静に判断出来るようになったと感じる。その問題の本質は何なのかを感じとるようになってきた。

２　課題

○　学力差が大きいので、別解までいかず、答えを求めるだけで精一杯になってしまう生徒への対応。

○　教師が提示する問題として、良い別解がある問題を精選する必要がある。

○　生徒自らが別解を見つけられるような声かけをしていく必要がある。

３　提言：別解を考えさせていくための声かけの質を向上させるために

○　タイミングと教えすぎないことを念頭に声かけをしていく必要がある。

○　題材（良い別解が存在する問題）と発問の精選（生徒の思考の流れに沿った発問）をしていく必要がある。

＜授業実践＞

実践１

１　単元名　　数学Ａ「場合の数と確率」　（第４学年・１学期）

２　本単元及び本時について

本単元は、集合の要素の個数についてまとめ、場合の数の基本的な考え方について考察し、その後順列・組合せの考え方を導入し、確率の意味を理解し、試行や事象の考え方を明確にして確率の基本的な性質の理解を深め、さらに、試行の独立を基にして、反復試行の確率を求めることができるようにすることを目標としている。

本時で扱う期待値とは、ある試行を行ったとき、その結果として得られる数値の平均値のことである。本時は全 21 時間計画の第 19 時にあたり、期待値の応用問題を余事象の概念を活用して求めることができるようにすることをねらいとした。期待値の問題を多角的に考察するため、本時の研究の手立てを次のように具体化した。

３　授業の実際

まず、期待値の導入問題として以下の試行を生徒に掲示した。

> 1000 本のくじの中に、賞金が 10000 円の１等が１本、1000 円の２等が９本、 200 円の３等が 90 本、10 円の４等が 900 本入ったくじを引く

次に、生徒に１等から４等までの確率を、発問を中心として求めさせ下の表を完成させた。

X	10000	1000	200	10	計
p	$\frac{1}{1000}$	$\frac{9}{1000}$	$\frac{90}{1000}$	$\frac{900}{1000}$	1

また、表を完成させた後、生徒と以下のようなやりとりを行った（図１）。

T：みんななら 50 円だしてこのくじ引く？？
S：やらない。
T：なんで？？
S：だって、損するんじゃないの？
T：なんで損するってわかるの？
S：確率からなんとなく・・・
T：それじゃあ計算して論理的に考えてみるか。

図１　生徒とのやりとり１

上のやりとりの後、教師から期待値の定義を説明し、期待値とは何か、どのように計算して求めるものなのかを示し、実際に計算させてくじを引いて期待できる賞金額を求めさせた。その結果今回 50 円でこのくじを行うと損するということが期待値から判断できた。続いて、類題として以下の問題を掲示した。

> 一組のトランプ 52 枚をよくきり、カードを１枚引いてもとに戻す。これを繰り返し４回行うとき、ハートのカードを引く回数の期待値を求めよ。

まず、１回の試行でハートを引く確率、ハートを引かない確率をそれぞれ生徒に発問しながら、答えさせたが、それぞれ迷うことなく正解を発言した。生徒の思考として、ハートを引かない確率は余事象で考えればたやすく求めることができると判断し、$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ と考えることができた。

（ハートを引かない）＝（スペードまたはクラブまたはダイヤ）を引く、と考えて求めることもできるのだが、今回は生徒自ら余事象を活用して求めることができた。

また、反復試行の復習も同時に行い、「反復試行って何？」と生徒へ投げかけながら復習を行った。授業の最後に以下の期待値の入試問題のプリントを配布し解答する時間を与え、できている生徒に板書させた。

> ダイヤ２枚、ハート２枚、クラブ２枚、スペード１枚のカード並べ以下のように点数を定めるとき次を求めよ。
> 左から順にカードをめくり、n 枚目をめくって初めて４種類がそろったときにn 点とする。
> (1)　７点となる確率　(2)　６点となる確率　(3)　点数の期待値

ここでは、期待値を求める際に以下のやりとりを行った（図２）。

T : 期待値を求めるとき、点数の種類って何種類ある？
S : ４、５、６、７点
T : ３点はないの？
S : ないです。４種類がそろわないとダメなので。
T : そうだよね。それじゃあ、確率を求めれば期待値が求められるよね。

図２　生徒とのやりとり２

期待値を求めるのに４～７点の確率を求めなければいけないが、４点の確率は比較的簡単に求めることができる。しかし、５点となる確率は (2) と同様の方法でできるが、計算が大変面倒である。その際、生徒に以下のような投げかけをして、計算させた（図３）。

T : 確率って合計でいくつだっけ？
S : １です。
T : じゃあ５点の確率ってどのように計算したらいいのかな？
S : 余事象使えばいいんじゃない？
T : そうだね。(2) と同じようにやってもできるけど、余事象の概念を使えばいいよね。

図３　生徒への投げかけ

最後は時間が足りなくなってしまったので教師が板書し、期待値を求めた。数学は、答えは一つだが、様々な解法があるので自分で解法を選択できるように伝えた。

４　考察

期待値については、確率の総復習的な要素も含んでいるので、反復試行や余事象など基本的な事項の復習も兼ねて授業を行った。実際には、確率の問題で別解を使用できる問題はそれほど多くないが、余事象の概念を活用することによって多角的に見ることができるのではないかと感じた。

また、生徒の多くが始めから余事象を活用すれば良いと理解していた。難易度の高い問題になると、計算力もかなり要求されるので「考え方」と「思考力(計算力)」を同時に高めていく必要があると感じた。

実践２

１　**単元名**　　数学Ⅱ　「図形と方程式」　（第４学年・２学期）

２　本単元及び本時について

本単元は、図形を与えられた条件の集合としてみる考えの理解を深めるとともに、方程式を満たす点の集合が座標平面上の軌跡を表すことを理解させ、軌跡が直線や円またはそれらの一部となるような場合について、実際に軌跡を求めることができるようにすることを目標としている。

本時は全 21 時間計画の第 16 時にあたり、条件を満たす軌跡を平面図形の概念を活用して導けることをねらいとした。軌跡の問題を多角的に考察するため、本時の研究の手立てを次のように具体化した。

３　授業の実際

まず、復習として軌跡とは何かということについて生徒を指名して答えさせ、本時の授業で何を求めていくのかを明確にして確認プリントを配布した。

> 直線 $y=x+k$ と円$x^2+y^2=2$ が異なる２点 Q、R で交わるとき、線分 QR の中点を P として、次の問いに答えよ。
> (1) 定数 k の値の範囲を求めよ。
> (2) 点 P の座標を (x, y) とし、x と y を k を使って表せ。
> (3) k の値が(1)で求めた範囲で変化するとき、点 P の軌跡を求めよ。

上記の問題を生徒を指名しながら解いた。注意事項として、いろいろな角度から問題を考察してほしいので別解の有無やどの解法がよりよいものなのかを生徒と一緒に確認しながら授業展開した。

まず、 (1)を解く際に何を考えたらよいのかを確認させながら進めたところ、生徒は図４のように判別式を活用する解法を第一に考えていた。別の解法はないかと確認したところ、図５のような点と直線の距離の公式を活用して問題を解くという別解が出た。 (2)を解くには中点の座標を求める必要があることを確認させ、どのようにしたらよいのかを発問した。生徒から、すぐに解と係数の関係を利用すればよいという考えが出たので、全体で再度それを確認した。 (3)では軌跡を求めるのだが、 (2)の座標から文字 k を消去して x と y の式で表すように指示した。注意事項として (1)の範囲を注意しておかなければならないことを確認した。

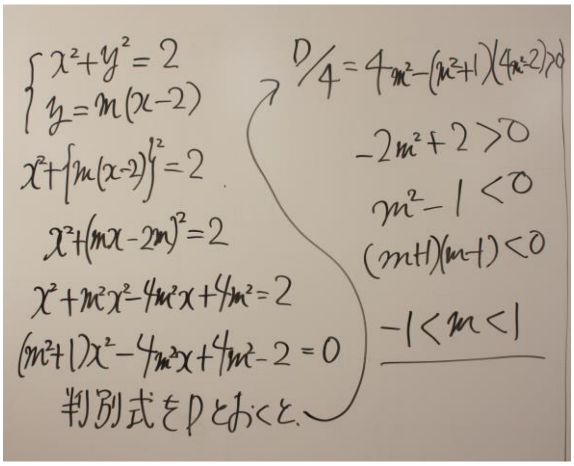


図４　判別式を使用した解法

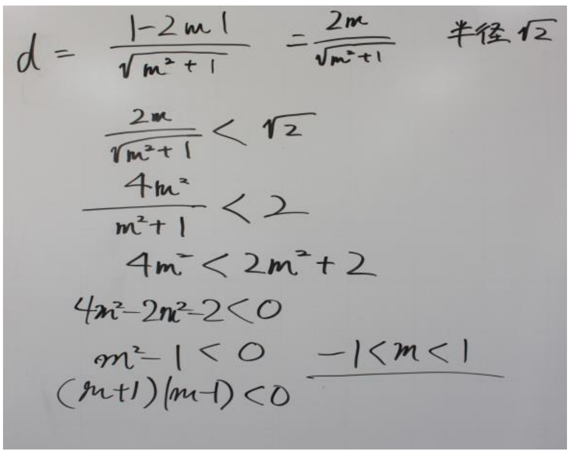


図５　点と直線の距離の公式を使用した解法

次に、同じ問いについて直線を $y=m(x-2)$ に変えたらどうなるかを個別学習で考えさせた。同じやり方でできると声かけをしながら机間指導を行った。 (1)は、ほとんどの生徒が判別式を活用して解いていたが、数名は点と直線の公式を活用していた。二つの解法を生徒に板書してもらい解説した（図６）。

(2) については計算していく過程で　m^4 がでてきて戸惑う生徒も数名いたが、結果的にほとんどの生徒が４乗の項はすべて消えてしまうことに気付いた。 (3)では、予想通り手が止まってしまう生徒が多くなったが、図７のように隣や前後の生徒と話し合いながら解いていた。

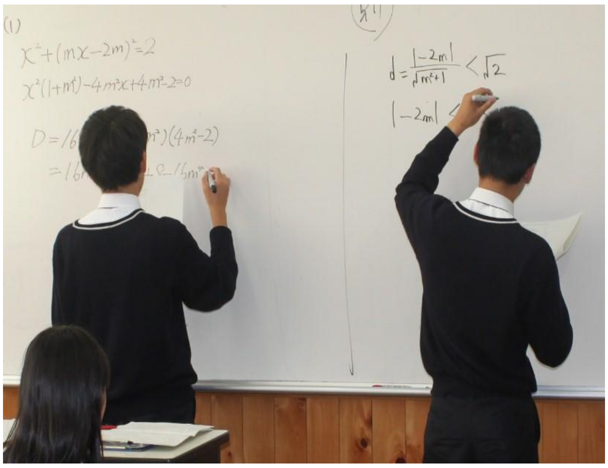


図６　生徒の板書

図７　相談

(3) も生徒に板書させ、教師が解説した。この解法は代数的なものであり、かなりの計算力が必要とされる大学入試レベルの問題である。現段階では、標準クラスの生徒にとって難易度が高く手がつけられない可能性が高かったが、何とかして解きたい、理解したいという強い意志を感じ取ることができた。

結果として、教師が別解として代数的に解くのではなく、幾何的な解法として説明をした。図８のように円周角の定理の逆を使い原点と(2，0) を直径とした円の一部になることを示した。原点を中心とした円との交点を求め x の範囲を求めることができる。もちろん、代数的な手法で x の範囲を求めることができるのだが、やや難解な手法であるので幾何的な解法のほうが生徒に受け入れやすいと感じた。

$(x-1)^2+y^2=1$
$(0 \leq x < 1)$

円周角の定理の逆を使い、原点と(2，0)を直径とした円の一部になる。

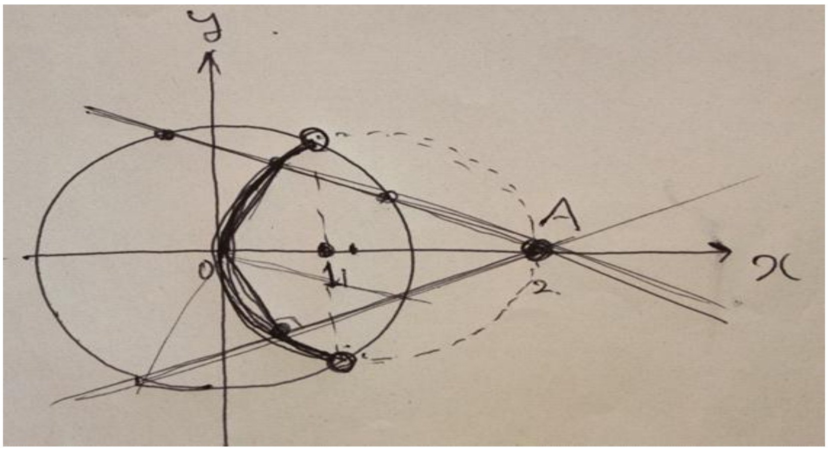


図８　幾何学的な解法

４　考察

判別式や点と直線の公式のように、一つの解法にとどまらず別の解法にも着目しながら問題を解くことができた。また、解と係数の関係など既習の内容もヒントを出すことなく生徒自らの力で解決することができたのは、既習内容の復習が徹底できているからであると感じた。しかし、 (3)の別解については生徒自らが「別解」に気付くというのではなく、教師の方から導くという形になってしまった。原因としては、１時間の学習内容が多く、時間が足りなかったからではないかと考えられる。多角的に問題を捉える力を育てるための視点を与える効果的な声かけとして、「～すればいいよ」、「～してみたらどうかな」や「～と見ればできるよ」を継続して行っていく必要があると感じた。

授業が終わってからも生徒同士で教え合うなど学ぶ姿勢が定着していると感じる場面があった。多角的に問題を捉える力の育成に向け、今後、更に効果的な声かけを工夫していきたい。