

群 教 セ	G03 - 04
	令 2.275 集
	数学一高

図形分野において、求めた解答を自ら検証 できる生徒の育成

—解答手順の提示とソフトウェア「GeoGebra」の活用を通して—

特別研修員 小笠原 尚樹

I 研究テーマ設定の理由

高等学校学習指導要領解説数学編では、「数学を活用して事象を論理的に考察する力」の中で「問題の解決に当たっては、解決の見通しをもつとともに、確かな根拠から論理的に考察する力が必要である」、「得られた結果の意味を条件や過程に即して考察する機会を設けることが重要である」と記されている。

研究協力校の生徒は、教科書の解法や公式を覚え、手順通りに答えを導くことができる。一方、図形分野にも関わらず、最後まで図形を描かずに計算だけで問題を解いてしまうことも多くあり、その結果、導いた解答が見当はずれであっても気付かないままであることがよく見られる。生徒には計算だけでなく図形的な知識も活用することで、求めた解答を検証できるようになってほしい。

本研究では、「解答を検証するための手順」を提示し、計算を始める前に、図形を予想させるようにした。また、図形のイメージの共有化のため、ソフトウェア「GeoGebra」を用いた。予想した図形と求めた解答を比較することにより、解答を自ら検証できるようになることを目指す。

II 研究内容

1 研究構想図

【手立て1】解答を検証するための手順の提示

手順1 図形を描く。



条件式に具体的な数値を代入しながら、分かる部分から描き、予想する。

図形イメージを共有する。

手順2 問題を解く。

計算を進め、解答を作る。

手順3 手順1と手順2を比較する。



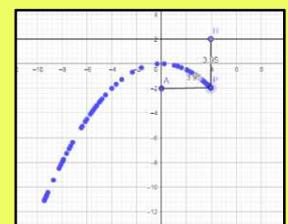
手順1で描いた図形と、手順2で求めた方程式を比較し、求めた方程式が正しいかどうかを検証する。

矛盾が生じた部分から計算ミスや考え方の間違いを見付け出す。

【手立て2】

「GeoGebra」による図形イメージの共有化

求める図形が通る点を生徒に答えさせ、その内容を「GeoGebra」を用いて映し出すことにより、図形イメージを共有する。



※「GeoGebra」とは無料で使える数学ソフトウェアであり、関数のグラフや空間図形などを表示することができる。

目指す生徒像

求めた解答を自ら検証し、必要に応じて解答を修正することができる。



2 授業改善に向けた手立て

手立て1 解答を検証するための手順の提示

自分で導いた解答を自己検証し、解答の精度を上げる習慣を身に付けるため、以下の手順1～手順3を示す。

手順1 図形を描く。

問題に取り掛かる前に、条件式に具体的な数値を代入しながら、分かる部分から図形を描き、予想する。

手順2 問題を解く。

計算を進め、解答を作る。

手順3 手順1と手順2を比較する。

手順1で描いた図形と、手順2で求めた方程式を比較し、求めた方程式が正しいかどうかを検証する。矛盾が生じた部分から計算ミスや考え方の間違いを見付け出す。

手立て2 「GeoGebra」による図形イメージの共有化

手立て1の手順1の過程において、生徒個々の図形イメージを共有化する目的で、ソフトウェア「GeoGebra」を使用し、図形をスクリーンに映し出す。求める図形が通る点を生徒に答えさせ、その内容を映し出すことにより、イメージを共有する。

III 研究のまとめ

1 成果

- 振り返りシートには「軌跡の概形予想ができたことで自信をもって解くことができた」などの回答があり、図形を描かせてから問題を解くことは、生徒が問題を解く上で効果的に作用することが分かった。どのような図形になるかがある程度予想できているため、見通しをもって計算を進めることができたようである。図を描くことに苦戦していた生徒もいたが、計算結果が描いた図形と一致するように試行錯誤しながら考えている姿が見られた。
- 振り返りシートの「モニターに軌跡が点で映っていてどういう軌跡をたどるのがよく分かった」などの回答や、行き詰まって解答を進めることができなかった生徒がスクリーンに映し出された図形を見たことで計算を再開することができたことから「GeoGebra」を活用することにより生徒はより具体的な図形イメージをもつことができることが分かった。

2 課題

「GeoGebra」により、生徒はより具体的な図形をイメージをもつことができるが、グラフ等を「見せるタイミング」と「見せる範囲」を工夫する必要がある。今回は図形を自分だけで図形を描くことができない生徒も数人いたため、その生徒に対しては図形を見せることが効果的であったと思える。一方、自分だけで図形を描くことができる生徒に対してはグラフを見せることなく自分で描いた図形だけで解答の検証までできた方がよいと言える。また、あと少しで図形が描けそうな生徒に対しては十分考えさせた後に、グラフの一部だけをヒントとして示すのもよい。振り返りシートには「自分の導いた答えが合っているのかが分かりやすかった。」との回答があった。この回答はよい意見と捉えることもできるが、「GeoGebra」を用いて図形の「正解」を見せてしまっていることによる意見であるとも考えられる。描いた図形と求めた方程式のどちらが正解か分からない状態で比較し、自己検証することが本当の検証であると考えられる。自己検証により、図形と求めた方程式双方の精度を上げる作業まで行わせることが課題である。

実践例

1 単元名 「図形と方程式（軌跡）」（第3学年・2学期）

2 本単元について

図形を与えられた条件を満たす点の集合としてみることについての理解を深める単元である。方程式を満たす点の集合が座標平面上の軌跡を表すことを理解し、軌跡が直線や円またはそれらの一部となるような簡単な場合について、実際に軌跡を求められるようにする。

以上のような考えから、本単元では以下のような指導計画を構想し実践した。

目標	数学的活動を通して次の事項を身に付けることができるよう指導する。 ア 軌跡について理解し、簡単な場合について軌跡を求めることができる。（知識及び技能） イ 座標平面上の図形について、方程式を用いて図形を簡潔・明瞭・的確に表現する。（思考力・判断力・表現力等） ウ 粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づいて判断しようとする。（学びに向かう力、人間性等）	
評価 規 準	(1) 軌跡を求める手順を理解している。（知識・理解） (2) 式を用いて、与えられた条件を満たす方程式を求め、それがどのような図形になるかを考察することができる。（数学的な見方や考え方） (3) 与えられた条件を満たす点全体が作る図形に関心を持ち、軌跡を調べようとする。（関心・意欲・態度）	
過程	時間	主な学習活動
つか ひ	第1時	・問題演習を通して、軌跡の意味を理解し、条件から軌跡の方程式を求めることができるようにする。
追究す ・まと める	第2時	・軌跡の問題を2問解く。2問目は軌跡の定義域に制限のあるものを扱う。 ・授業の最初で示した手順通りに問題を解き、求めた解答を自ら検証する。

3 本時及び具体化した手立てについて

本時は全2時間計画の第2時に当たる。求めた図形の方程式の妥当性を検証することが目標である。妥当性を検証するとは、先に図形を描き、描いた図形と求めた方程式を比較し、自己検証することである。

今回は、求める点Pの軌跡が方程式で与えられた図形全体ではなく、定義域に制限があるものを扱う。点Pの軌跡の方程式を求めるだけであれば、条件式をただ機械的に計算するだけでもよいが、そのような解き方では、定義域の制限を見落としてしまう可能性がある。条件式の計算をする前に点Pの軌跡を予想させ、計算後に予想したものと照合する。このような手順を踏むことにより、点Pの動きに関して注意深く考察する習慣を付けることを目指す。

手立て1 解答を検証するための手順の提示

手順1 軌跡の図形を描く

問題に取り掛かる前に問題文を読み、軌跡の図形を描く。条件式に具体的な数値を代入し、点をプロットしながら分かる部分を描いていき、予想する。

手順2 条件から軌跡の方程式を求める。

条件から計算を進め、軌跡の方程式を求める。

手順3 手順1と手順2を比較する。

手順1で描いた図形と手順2での軌跡の方程式を比較し、考察する。矛盾が生じたりした部分から計算ミスや考え方の間違いを見付け出し、図形と軌跡の方程式を修正する。

手立て2 数学ソフトウェア「GeoGebra」による図形イメージの共有化

手立て2に関しては2ページと同様である。

4 授業の実際

(1) 導入

前時に基本的な軌跡の問題を用いて、条件式から点Pの軌跡を求める練習をした。前時との違いを明確にするため、本時の目標「求めた方程式の妥当性を考える」を伝え、以下の手順を説明した。

問題を解く手順

手順1 問題文を読み、図形を描く。

手順2 条件から、軌跡の方程式を求める。

手順3 手順2で求めた軌跡と、手順1で予想した図形を照合してみる。

(2) 展開

以下の問題を手順に従って実際に解いていく。

問題1 点A(0, -2)との距離と直線 $y = 2$ との距離が等しい点Pの軌跡を求めよ。

問題2 点A(-1, 0)を通り、傾きが a の直線を l とする。放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 l が2点B, Cで交わっているとき、線分BCの中点Pの軌跡を求めよ。

問題1に取り組む。

手順通りに問題文を読ませ、図を描くように指示をした。「具体的な点をいくつか取ってみて」と投げかけて、具体的な点から全体を想像するように促した。机間支援をして、最初の段階で勘違いをしている生徒やミスをしている生徒にはアドバイスをした。ある程度作業が進んだところで、作業をやめさせ、黒板の右半分には張ってあるスクリーンに注目させた。「GeoGebra」を用いて画面に問題文の状況を映し出した(図1)。まずは図1のPHとPAが何を表しているかを説明し、そのあとで、点Pが実際に動いている様子を生徒に見せた(図2)。最後に「GeoGebra」の残像機能を使い、点Pの軌跡を残像を用いて表した。スクリーンの映像を見た後で、生徒は図を修正し、手順2に移った(図3)。再び机間支援をし、作業の進まない生徒にアドバイスをし、方程式が求められた生徒に対しては、「描いた図形と方程式が合っていますか」と声をかけ、自己検証するように促した。

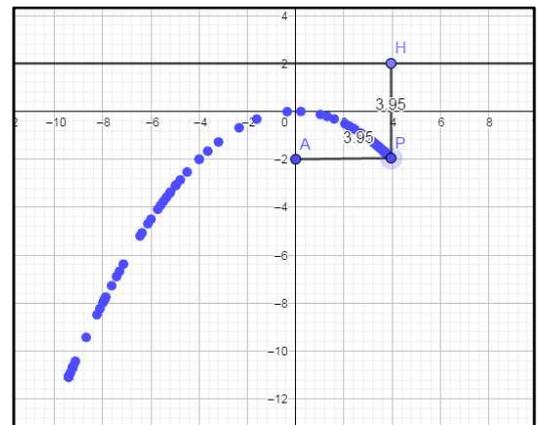


図1 問題1の「GeoGebra」による再現

「描いた図形と方程式が合っていますか」と

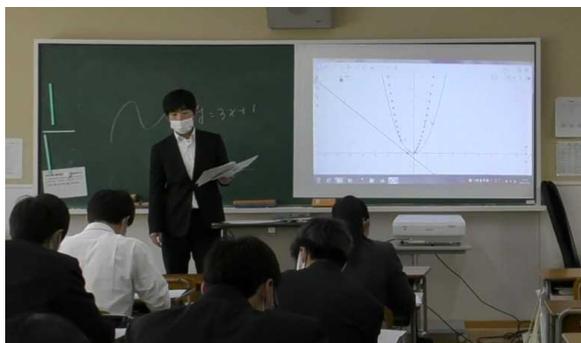


図2 「GeoGebra」で図形を映している様子



図3 問題演習に取り組む生徒の様子

問題2に取り組む。

ある程度、問題1の方程式が求められたところで、問題2に移るように指示をした。問題1と同様の手順を踏むように指示をしたが、指示をする前から手順通りに進めようとしている生徒がほとんどだった。机間支援をし、図形をある程度考えさせたところで、スクリーンに注目するように指示をした。生徒に「 l の方程式はどうなりますか」と問いかけ、生徒が答えた数式を入力して直線を描画し、その後、問題文の条件を確認しながら点Pまでを描画した。残像機能で点Pの軌跡を見せた後(図4)、「点Pの軌跡が途切れるのはなぜでしょうか」と問いかけたところ、「2点で交わっていないから」という回答があった。「では、それはどんな時か分かりますか」と問いかけると、「判別式を使う」という回答があった。その後、問題1と同じように生徒が問題を解く様子を観察し、理解の遅い生徒には個別に支援をした。

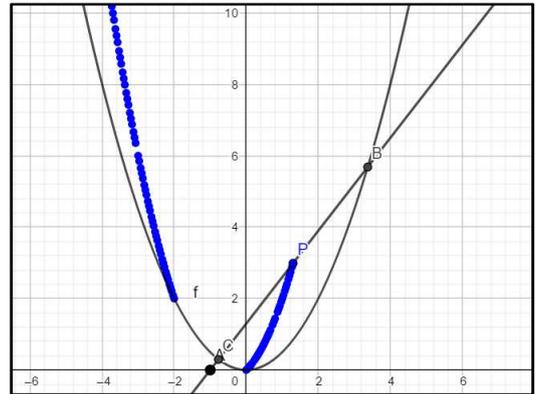


図4 問題2の「GeoGebra」による再現

(3) まとめ

授業残り5分のところで、振り返りシートを配付し、本時の授業について振り返らせた。「今回のような解き方は今までの自分の解き方と比べてどうでしたか?」という質問に対する回答を自由記述形式で書かせた。

5 考察

この授業の成果と課題については前述したとおりである。

今回は一問をじっくり考えさせる内容であった。ある程度の進度を確保しなければならないことから毎日の授業で一問一問にこれだけ時間を割くことはできないが、今回時間をかけて考えさせる授業を実践してみたことで見えてきたことがある。

一つ目は生徒が図を描くことに慣れていないということである。机間支援により、アドバイスをしなければ図を描けない生徒が多くいた。普段図を意識していないことがよく分かった。図を半ば強制的に意識させたことの効果は振り返りシートの記述部分に表れていた。「軌跡の概形予想ができたことで自信をもって解くことができた」、「自分の導いた答えが合っているのかどうか分かりやすかった」などの回答があり、図形を描かせてから問題を解くことは、生徒が問題を解く上で効果的であることが分かった。

二つ目は、軌跡という概念の理解度の低さである。前時に基本的な軌跡の問題を用いて、問題文の条件から点Pの軌跡の方程式を求める授業を行っている。その授業ではほとんどの生徒が点Pの方程式を求めることができた。しかし、机間支援によって、生徒の書いている図などを見ると、軌跡というものの概念があまり理解されていないように思えた。振り返りシートに「モニターに軌跡が点で映っていてどういう軌跡をたどるのがよく分かった」という回答があったことや行き詰って解答を進めることができなかった生徒が映像を見て、図を修正し、計算を再開することができたことから映像を見たことで初めて軌跡というものが何であるかをつかんだ生徒もいたようである。そのような意味で「GeoGebra」は効果を発揮したといえる。最終的にはこのソフトウェアを使わなくても、図形の概形をある程度描けるようになることが大切である。

課題としては、一斉に進める授業であったため、数人の生徒は十分に考えることがないまま、次の段階や次の問題に進まなければならないようになってしまったことである。振り返りシートにも「最後までできなかったのでよく分からなかった」という意見もあった。生徒一人一人の進度で進めることができる工夫も検討の余地がある。