

2 授業改善に向けた手立て

すぐには解決の方針が浮かばない問題を、既習事項を活用できる問題へと焦点化できるようにするために、以下の手立てを講じる。

手立て 「実験」と「言い換え」を繰り返す4 Round構成の授業デザイン

この手立ては、生徒が「実験」と「言い換え」を意識しながら、Round 1～4で問題の焦点化を目指すものである。ワークシート（図1）を用いて各Roundを進める。

Round 1：個別追究

- ・ 問題に関する情報を整理するために、「実験」を行い、その内容を記述させる。有益な結果ばかりが得られるとは限らないので、ためらわずに思いのままに試行錯誤するように声を掛ける。
- ・ 既習事項を用いて解決できる問題への「言い換え」を考えさせる。
- ・ 「実験」を基に問題の「言い換え」を考えさせる。また、「言い換え」に過不足がないか、すなわち問題を正しく表現し直しているかを確認するために、更に「実験」するように指示する。

Round 2：協働追究

- ・ それぞれの「実験」と「言い換え」の内容をもち寄って協議させる。
- ・ 「実験」や「言い換え」が、問題解決につながりそうかという視点をもつよう声を掛ける。
- ・ 追加で「実験」を行ったり、より解決しやすい問題の表現となるような「言い換え」を考えたりするように指示する。

Round 3：全体共有

- ・ 代表生徒にRound 1、Round 2の内容を発表させる。その発表を基に、問題の核に迫るためように発問する。

Round 4：「解答の設計図」作成

- ・ どのような流れで解答を作成するかを個別に考え、「解答の設計図」としてまとめさせる。
「個」の時間に戻して「解答の設計図」を作成することで、生徒にメタ認知を促す。
その後、ワークシートを参照しながら、解答用紙に解答を作成するように指示する。

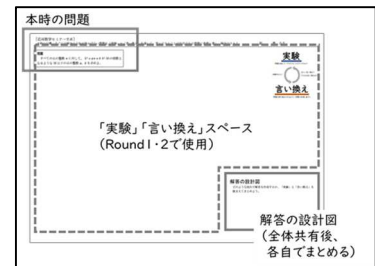


図1 ワークシート

Ⅲ 研究のまとめ

1 成果

- 「実験」と「言い換え」をキーワードとしたことで、Round 1 およびRound 2では、初見の問題に対する抵抗感が軽減され、生徒全員が手を止めることなく、試行錯誤や協議に取り組めた。
- Round 3では、代表生徒の発表や教師からの発問を通してほとんどの生徒が問題の核に迫ることができ、その結果、Round 4で88%（58名中51名）の生徒が解決の見通しをもてるような「解答の設計図」を自分の言葉で記入できた。各Roundが効果的に機能し、問題を焦点化することができた。
- 「振り返りシート」において、問題の核となる構造を見抜いた記述が多数見られた。「実験」や「言い換え」を繰り返すことが、既習の知識と関連付けて問題を焦点化する力を養うために有効だった。

2 課題

協働追究する場面で、同じ「実験」の繰り返しに終始したグループや、焦点化までの見通しをもてないグループ、行き詰まった際の打開策を考案できないグループが見られた。グループを変えて協議するなどの工夫も必要であった。

実践例

1 単元名 「数学的な見方・考え方を働かせて、問題を焦点化しよう」（第3学年・2学期）

2 本単元について

本単元は、教科書の一通りの分野を学習し終えた後に取り上げる単元である。これまでは、それぞれの分野ごとに、既習事項を活用しながら問題解決する活動を行ってきたが、ここでは、様々な分野を横断する問題や、読んだだけではどの分野の問題なのかが分かりにくい問題、すなわち、すぐには解決の方針が浮かばない問題を扱うこととする。この単元における問題解決の過程を通して、問題を焦点化するために必要な数学的な見方・考え方を養いたい。

以上のような考えから、本単元では以下のような指導計画を構想し実践した。

目標	(1) 数学における基本的な概念や原理・法則を理解し、問題解決の過程でそれらを活用することができる。（知識及び技能） (2) 数学を活用して問題を論理的に考察し、与えられた事象を数学化、焦点化し、簡潔に表現し、解決することができる。（思考力、判断力、表現力等） (3) 問題を焦点化し、既習事項を用いて解決する活動を通して、粘り強く考え、その過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度を身に付ける。（学びに向かう力、人間性等）
評価 規 準	(1) 様々な数学的事項の基本的な概念を理解し、それらを活用して問題を解くことができる。（知識・技能） (2) すぐには解決の方針が浮かばない問題について、既習事項を活用できる問題に表現し直し、解決することができる。（思考・判断・表現） (3) 問題解決において、粘り強く考え、その過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。（主体的に学習に取り組む態度）
時間	主な学習活動
第1 ～3時	・既習事項を用いた基本問題の演習を行う。
第4時	・「実験」「言い換え」を意識した問題演習を行う。
第5時	・単元テストに取り組む。

3 本時及び具体化した手立てについて

本時は全5時間計画の第4時に当たる。

手立て 「実験」と「言い換え」を繰り返す4Round構成の授業デザイン

各Roundでの指導内容は、2ページの内容と同様である。

4 授業の実際

本時では次の問題を扱う。

問題

すべての正の整数 n に対して、

$5^n + an + b$ が16の倍数となるような16以下の正の整数 a, b を求めよ。

（一橋大学・1997年度・前期日程・数学・問1）

この問題の解決に当たっては、まず、 n に1と2を代入することで、条件を満たす a と b の値を求めることができる。この過程では、具体的な値を入れてみるなどの「実験」や、それに基づく式変形などの条件の「言い換え」を繰り返すことになる。しかし、これはあくまでも必要条件であるため、その十分性を示すべく、数学的帰納法などを用いた証明が必要となる。「すべての正の整数 n に対して」という部分を正しく議論するために、もとの問題を証明問題へと「言い換え」を行う必要があることに気付けるかがポイントとなる。

授業は、以下の流れで実践した。

導入（7分）→Round 1：個人追究（10分）→Round 2：協働追究（10分）

→Round 3：全体共有（15分）→Round 4：「解答の設計図」の作成（3分）

→解答の作成（10分）→「振り返りシート」の記入（5分）

授業の導入では、本時のキーワードとなる「実験」と「言い換え」を定義し、それらを繰り返すことで問題を焦点化することを本時の目標として提示した。

(1) Round 1 : 個別追究

生徒は問題を読み、自分でできそうなことに取り組んだ(図2)。多くの生徒は n に1から順に数を代入し、規則を探ろうとしていた。ほかにも、式の値をある数で割った余りに注目して分類しようと試みたり、 a と b の値の組を総当たりで求めたりしようとする生徒も見られた。また、割り算の余りに着目して式変形を試みる生徒も複数見られた。教師が「失敗を恐れずに、まずはできそうなことを探してみよう」と声を掛けたことで、生徒全員が手を止めることなく取り組むことができた。

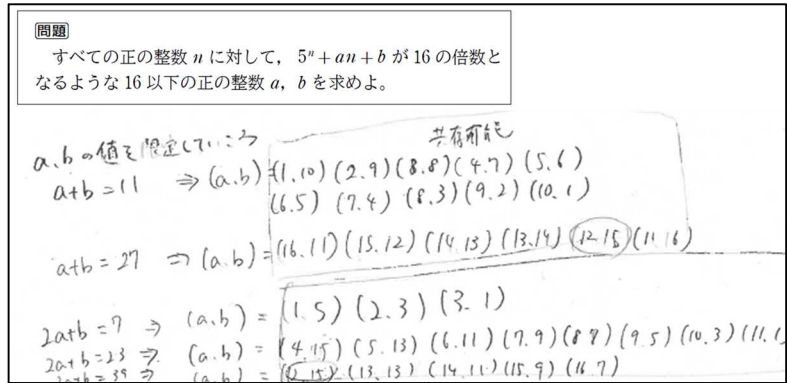


図2 生徒のワークシート

(2) Round 2 : 協働追究

Round 1 の段階で全ての生徒が何かしらの「実験」や「言い換え」をすることができたこともあり、Round 2 の冒頭から活発な協議が行われた。あるグループでは、ある生徒が予想した規則が本当に成り立っているかどうかを、「もっと実験してみよう」と再検証する様子が見られた。また、矢印「→」を繰り返して用いながら、元の問題を次々に言い換えようと試み、プリントにまとめているグループも見られた。「○○が成り立てば、△△が成り立つはず。だから、○○が成り立つ条件を考えよう」と相談しているグループも見られた。Round 2 の終了時点で、 a と b の値の組を特定することができた生徒は58名中およそ10名(3グループ)であった。

(3) Round 3 : 全体共有

まず、代表生徒に a と b の値の組を特定する方法を説明させた。その生徒は、 n に1と2を代入して「実験」することで a と b の値の組の候補を絞り、それら全てに対して、条件を満たすかを一つずつ「実験」することで、 a と b の値の組を探し当てた。また、ある生徒は、 n に1と2を代入して「実験」した後に、数式を用いた「言い換え」を行うことで、更に効率よく a と b の値の組を探し当てる方法を発表した。ここで、問題の焦点化に更に迫るべく、教師は生徒を揺さぶる発問を行った。生徒は、やり取りを通して、問題の核となる「言い換え」に気付くことができた。発問及びやり取りの概要は以下の通りである。

教師	「 a と b の値の組が求まって、終わりにしてよいでしょうか？ここまでの解答は、問題の要求に対して、正しい『言い換え』になっているのでしょうか？」
(生徒が周囲と協議した後)	
代表生徒	「ここまでは n が1と2のときしか考えていない。したがって、『すべての正の整数』を対象にした議論ができていない。」
教師	「ということは、この後どのようなことをしなくてはなりませんか？」
多数の生徒	「数学的帰納法を用いて、すべての n で成り立つことを証明する必要がある。」

(4) Round 4 : 「解答の設計図」作成

生徒は、3分間で「解答の設計図」を作成した。3分間という短い時間であったが、58名中51名の生徒が、解決の見通しをもてるような「解答の設計図」を自分の言葉で記入できていた(次ページ図3)。この時点で、ほとんどの生徒が問題の焦点化できていたと言える。

(5) 授業の振り返り

生徒は、「振り返りシート」に、「本時で行った『実験』『言い換え』のまとめ」「今後の問題演習で生かせそうなこと」を自分の言葉で記述した。特に、「今後の問題演習で生かせそうなこと」という項目においては、問題の核となる構造を見抜いた記述が多数見られた(次ページ図4)。

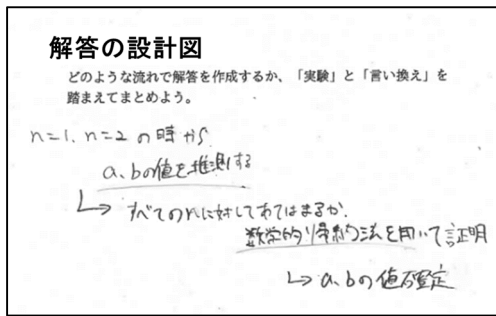


図3 「解答の設計図」
(生徒のワークシートより)

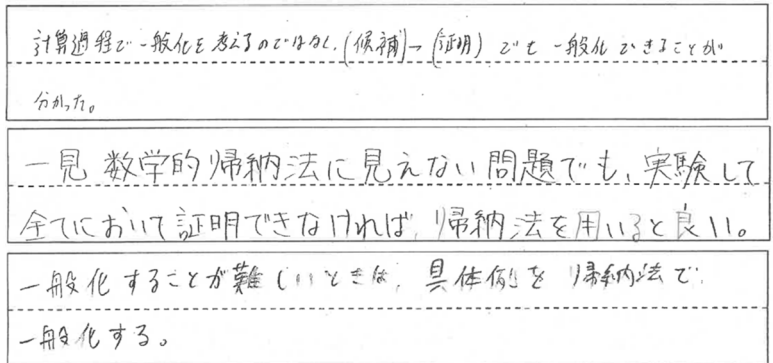


図4 「振り返りシート」の記述

5 考察

授業の導入で、丁寧に「実験」と「言い換え」を定義し、まずは失敗を恐れずにできることを実践してみるように働き掛けたことで、Round 1 では生徒は「実験」や「言い換え」をし続けることができていた。また、Round 2 では、生徒は「実験」と「言い換え」をキーワードとして意識した協議ができていた。当初の課題であった、初見の問題に対してどこから手を付けていいかわからず、解説を待つてしまうような生徒の姿は見られなかった。この点で、Round 1 およびRound 2 は、初見の問題に対する抵抗感を軽減し、解決の糸口を探るための試行錯誤を促すように機能していたと言える。問題に対するRound 1 及びRound 2 での生徒の反応として、主に次の①～③を予想していた。

- ① n に値を代入し、 a と b の値を探している
- ② a と b に様々な値を代入し、総当たりで a と b の値を探している
- ③ 二項展開や合同式を用いた式変形から a と b の値を探している

Round 2 の終了時点で、 a と b の値の組を特定することができた生徒はいずれも①の方法をとっていた。 n に値を代入して「実験」し、必要に応じて式を「言い換え」しながら a と b の値の組を探し当てた。最初は②の方法をとる生徒も数人いたが、「実験」すべき組が膨大になることに気付き、方針転換をしていた。③の方法をとった生徒も複数いたが、技巧的な式変形が必要となるため、行き詰まっていた。 a と b の値の組を求めることが容易ではなかったため、いずれの生徒も、この時点で求まる a と b の値が必要条件に過ぎないことには気付かなかった。そこで、Round 3 が機能を果たしたと言える。代表生徒の発表を起点として、教師からの発問を投げ掛け、協議させたことで、ほとんどの生徒が数学的帰納法による十分性の検証という問題の核に迫ることができた。Round 3 でクラス全体での共有活動の場面を取り入れることで、生徒の活動が中心であるRound 1、Round 2 だけでは気付かなかった考えに気付くことができた。その結果、問題の焦点化に更に近づくことができたと言える。また、Round 4 では、これまでを振り返り、言語化したことで、思考を整理することができた。Round 4 は、Round 1～3 とその後の解答作成を結ぶ懸け橋として機能していたと言える。生徒は「解答の設計図」を参照しながら、スムーズに解答作成に取り掛かれていた。以上のことから、Round 1～4 のそれぞれに意義があり、4 Round 構成の授業デザインが問題を焦点化する力を養うために有効であったと考えられる。

この授業デザインは、どの内容のまとまりに対しても活用できるものであり、汎用性は高いと思われる。その一方で、「実験」と「言い換え」のバリエーションは、既習事項の習熟度や、それまでの問題演習の経験にも依存している。そのため、それまでの指導の蓄積や、題材とする問題の選定も肝要である。題材としては、最初に見た際には解法がすぐには思い描けないが、実際に「実験」や「言い換え」をすることでやるべきことが徐々に見えてくる問題が適していると考えられる。